Stellenwertsysteme

1 Das Horner-Schema

Aufgabe: Wandle die Binärzahl $z = 10111_2$ effizient in das Dezimalsystem um.

Lösung: Allgemein ist die Bedeutung der einzelnen Ziffern $a_i \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$. $\mathbb{B}$ ist die Zahlenmenge der Binärziffern.

Wir notieren die Binärdarstellung der Zahl z als Summe von Zweierpotenzen entsprechend der allgemeinen Darstellung $z = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i$; n - Anzahl der Binärstellen. Danach wird dieser Ausdruck entsprechend des Horner-Schemas umgewandelt.

$$\begin{aligned}
10111_2 &= \underbrace{1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1}\, +1 \cdot 2^0 = 23_{10} \quad |\, 2\,\text{ausklammern} \\
&= \underbrace{(1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1}\, +1) \cdot 2 + 1 = 23_{10} \\
&= \underbrace{((1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1}\, +1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = 23_{10} \\
&= \underbrace{(((1 \cdot 2^1}\, +0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = 23_{10} \\
&= ((((1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = 23_{10}
\end{aligned}$$

Diesen Horner-Term kann man nun direkt in folgendes Schema übertragen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 \\
\downarrow & + \nearrow & \downarrow & + \nearrow & \downarrow & + \nearrow & \downarrow & + \nearrow & \downarrow \\
1 \cdot 2 & & 2 \cdot 2 & & 5 \cdot 2 & & 11 \cdot 2 & & \underline{\underline{23}}
\end{array}$$

Die Pfeile kann man weglassen und bekommt so das Horner-Schema in **einfacher Notation:**

	1	0	1	1	1
·2		2	4	10	22
	1	2	5	11	$\underline{\underline{23}}$

Ein Problem bleibt beim Berechnen großer Zahlen nach diesem Schema. Die Produkte werden recht groß.

Aufgabe: Berechne die Zahl $z = 10111011111_2$ mit dem einfachen Horner-Schema.

Lösung: Wird im Unterricht erarbeitet.

Um diese großen Produkte zu umgehen, kann man bei der Berechnung eine Trennung der Einer und Zehnerstellen durchführen und diese Stellen einzeln berechnen.

Kaskadierendes Horner-Schema: für die Berechnung der Zahl $z = 110101_2$

	1	1	0	1	0	1	
·2		2	6	12	6	12	
	1	3	6	3	6	$\boxed{3}$	der Einer wird notiert
	0	0	0	1	0	1	der Zehner wird hier übertragen
·2					2	4	
	0	0	0	1	2	$\boxed{5}$	Ergebnis: $\underline{\underline{53_{10}}}$

Eine etwas geänderte Schreibweise wird nun für das Horner-Schema verwendet. Man notiert die umzuwandelnde Zahl senkrecht wie folgt:

	1
0 1	1
0 3	0
1 6	1
0 3	0
1 6	1
3	·2

$\rightarrow$

		1
	0 1	1
	0 3	0
	1 6	1
0 1	0 3	0
0 2	1 6	1
0 5	3	·2

Ergebnis: $\underline{\underline{53_{10}}}$

Schrittfolge zum Berechnen einer Zahl in einem Stellenwertsystem nach dem **kaskadierenden Horner-Schema:**

1. Schreibe die Binärzahl ziffernweise mit dem höchstwertigen Bit ganz oben untereinander.
2. Notiere die höchstwertige Ziffer links neben der nächst tieferwertigen Binärstelle.
3. Multipliziere die linke Ziffer mit der Basis (hier 2) und addiere das rechtsstehende Bit hinzu.
4. Notiere den Zehner des Ergebnisses links und den Einer eine Zeile tiefer ebenfalls

links. (Diagonalnotation von Einer und Zehner)

5. Führe die Schritte fort bis in der linkesten Zeile keine Überträge mehr auftreten.

Aufgabe: Berechne die Zahl $z = 10111011111_2$ mit dem kaskadierenden Horner-Schema.

Lösung: Wird im Unterricht erarbeitet.

Aufgabe: Berechne die Zahl $z = D2F_{16}$ mit dem kaskadierenden Horner-Schema.

Lösung: Wird im Unterricht erarbeitet.

2 Divison mit Rest

Bei der Darstellung des Polynoms im Hornerschema sieht man zudem, dass bei ganzzahliger Division durch 2 jeweils ein Restpolynom mit Grad $n-1$ und als Rest eben eine 0 oder 1 übrigbleibt.

$$\begin{aligned} p(b) &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= (1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + \cdot 2^1 + 1) \cdot 2 + 1 \\ \Rightarrow \frac{p(b)}{2} &= q(b), \quad \text{Rest 1, mit grad } q(b) = \text{grad } p(b) - 1 \end{aligned}$$

Nun kann nach diesem Schema die Division ebenfalls effizienter realisiert werden. Dazu zuerst die Vorgehensweise wieder in tabellarischer Notation. Stelle die Zahl z = 53 im Binärsystem dar.

2	0 5	
6	1 3	
	1	:2

1. Schreibe die Ziffern beginnend mit dem Zehner untereinander.
2. Bilde den Quotienten der ersten Ziffer mit der Basis (hier 2). Notiere den ganzzahligen Anteil links und den Rest eine Zeile tiefer links neben der Einerziffer.
3. Führe fort, bis keine Überträge mehr auftreten.

Die vollständige Berechnung ist hier zu sehen.

0	0	0	0	0 1	0 2	0 5	
0	1	3	6	1 3	0 6	1 3	
0	1	1	0	1	0	1	:2 ← Ergebnis: 0110101

Aufgabe: Wandle die Zahl 751_{10} mit Hilfe des Horner-Schemas in das Binärsystem um!

Lösung: Wird im Unterricht erarbeitet.