Rechnen in $\mathbb{B}$

Ralf Dorn

Heinrich-Hertz-Gymnasium

3. September 2018

Wie werden Kommazahlen dargestellt?

Festkommazahlen

Wie werden Kommazahlen dargestellt?

$z = 4.25_{10}$

Wie werden Kommazahlen dargestellt?

$z = 4.25_{10}$
$z = 4.25_{10} = 100.01 \rightarrow$ Berechnung des Nachkommaanteiles mit „Mutliplikation mit Rest“

Wie werden Kommazahlen dargestellt?

$z = 4.25_{10}$
$z = 4.25_{10} = 100.01 \rightarrow$ Berechnung des Nachkommaanteiles mit „Mutliplikation mit Rest“

$z = 17.33_{10}$

Wie werden Kommazahlen dargestellt?

$z = 4.25_{10}$
$z = 4.25_{10} = 100.01 \rightarrow$ Berechnung des Nachkommaanteiles mit „Mutliplikation mit Rest“

$z = 17.33_{10}$
$z = 17.33_{10} = 10001.0101 \quad (\textit{Runden}!)$

Festkommazahlen

Wie werden Kommazahlen dargestellt?

$z = 4.25_{10}$
$z = 4.25_{10} = 100.01 \rightarrow$ Berechnung des Nachkommaanteiles mit „Mutliplikation mit Rest“

$z = 17.33_{10}$
$z = 17.33_{10} = 10001.0101 \quad (\textit{Runden}!)$

$$\underbrace{\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}}_{\textit{Vorkommaanteil}} \bullet \underbrace{\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}}_{\textit{Nachkommaanteil}}$$

$\checkmark$

Gleitkommazahlen

$c = 299792.458\,\frac{km}{s} = 2.99792458 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$

Gleitkommazahlen

$$c = 299792.458\,\frac{km}{s} = 2.99792458 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

$\Rightarrow$ Aufteilung in Mantisse und Exponent

Gleitkommazahlen

$$c = 299792.458 \,\frac{km}{s} = 2.99792458 \cdot 10^8 \,\frac{m}{s}$$

$\Rightarrow$ Aufteilung in Mantisse und Exponent

IEEE 754 Standard: Festlegung der

- Bitbreite n
- Aufteilung von Mantisse M
- und Exponent E

Gleitkommazahlen

$$c = 299792.458\,\frac{km}{s} = 2.99792458 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$

$\Rightarrow$ Aufteilung in Mantisse und Exponent

IEEE 754 Standard: Festlegung der

- Bitbreite n
- Aufteilung von Mantisse M
- und Exponent E

32bit Single Precision Format

1	8	23

Gleitkommazahlen

$c = 299792.458\ \frac{km}{s} = 2.99792458 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}$

$\Rightarrow$ Aufteilung in Mantisse und Exponent

IEEE 754 Standard: Festlegung der

- Bitbreite n
- Aufteilung von Mantisse M
- und Exponent E

32bit Single Precision Format

1	8	23
S	Exponent E	Mantisse M

Gleitkommazahlen

$c = 299792.458 \frac{km}{s} = 2.99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$\Rightarrow$ Aufteilung in Mantisse und Exponent

IEEE 754 Standard: Festlegung der

- Bitbreite n
- Aufteilung von Mantisse M
- und Exponent E

32bit Single Precision Format

1	8	23
S	Exponent E	Mantisse M
31	30 29 28 ... 23	22 21 ... 0

Gleitkommazahlen

64bit Double Precision Format

1	11	52

64bit Double Precision Format

1	11	52

allgemein: $z = (-1)^{VZ} \cdot M \cdot 2^{E}$

Gleitkommazahlen

64bit Double Precision Format

1	11	52

allgemein: $z = (-1)^{VZ} \cdot M \cdot 2^E$

Definition: Eine Gleitkommazahl z heißt normalisiert, wenn $1 \leq M < 2$, d.h. wenn M von der Form $1.m_{-1}m_{-2}\dots m_{-k}$ ist.

Die Mantisse M ergibt sich bei der normalisierten Form

$$M = 1 + \sum_{i=-1}^{-k} m_i 2^i$$

64bit Double Precision Format

1	11	52

allgemein: $z = (-1)^{VZ} \cdot M \cdot 2^E$

Definition: Eine Gleitkommazahl z heißt normalisiert, wenn $1 \leq M < 2$, d.h. wenn M von der Form $1.m_{-1}m_{-2}\ldots m_{-k}$ ist.

Die Mantisse M ergibt sich bei der normalisierten Form

$$M = 1 + \sum_{i=-1}^{-k} m_i 2^i$$

Da vor dem Komma stets die 1 steht, wird diese weggelassen ("hidden bit")

Gleitkommazahlen

Somit folgt für die Darstellung: $z = (-1)^{VZ} \cdot (1 + m) \cdot 2^E$, $m = \sum_{i=-1}^{-k} m_i 2^i$

Gleitkommazahlen

Somit folgt für die Darstellung: $z = (-1)^{VZ} \cdot (1 + m) \cdot 2^E$, $m = \sum_{i=-1}^{-k} m_i 2^i$

Problem: negative Exponenten

Gleitkommazahlen

Somit folgt für die Darstellung: $z = (-1)^{VZ} \cdot (1+m) \cdot 2^E$, $m = \sum_{i=-1}^{-k} m_i 2^i$

Problem: negative Exponenten
Es wird auf den ermittelten Exponenten ein BIAS addiert. Wie groß?

Gleitkommazahlen

Somit folgt für die Darstellung: $z = (-1)^{VZ} \cdot (1+m) \cdot 2^E$, $m = \sum_{i=-1}^{-k} m_i 2^i$

Problem: negative Exponenten
Es wird auf den ermittelten Exponenten ein BIAS addiert. Wie groß?
$Bias = 2^{n-1} - 1$ bei n = 8 folgt Bias = 127 (einfache Genauigkeit)

Gleitkommazahlen

Somit folgt für die Darstellung: $z = (-1)^{VZ} \cdot (1 + m) \cdot 2^E$, $m = \sum_{i=-1}^{-k} m_i 2^i$

Problem: negative Exponenten
Es wird auf den ermittelten Exponenten ein BIAS addiert. Wie groß?
$Bias = 2^{n-1} - 1$ bei n = 8 folgt Bias = 127 (einfache Genauigkeit)

$\Rightarrow$ Exzessdarstellung des Exponenten: $C = E + 127 = \sum_{i=0,\dots,7} e_i 2^i$

Gleitkommazahlen

Somit folgt für die Darstellung: $z = (-1)^{VZ} \cdot (1 + m) \cdot 2^E$, $m = \sum_{i=-1}^{-k} m_i 2^i$

Problem: negative Exponenten
Es wird auf den ermittelten Exponenten ein BIAS addiert. Wie groß?
$Bias = 2^{n-1} - 1$ bei n = 8 folgt Bias = 127 (einfache Genauigkeit)

$\Rightarrow$ Exzessdarstellung des Exponenten: $C = E + 127 = \sum_{i=0,\ldots,7} e_i 2^i$

Somit gilt abschließend für $z(S, C, m)$ in einfacher Genauigkeit:

$$z = (-1)^s \cdot (1 + \sum_{i=-1}^{-23} m_i 2^i) \cdot 2^{(\sum_{i=0}^{7} e_i 2^i - (2^7 - 1))}$$

Gleitkommazahlen

Somit folgt für die Darstellung: $z = (-1)^{VZ} \cdot (1+m) \cdot 2^E$, $m = \sum_{i=-1}^{-k} m_i 2^i$

Problem: negative Exponenten
Es wird auf den ermittelten Exponenten ein BIAS addiert. Wie groß?
$Bias = 2^{n-1} - 1$ bei n = 8 folgt Bias = 127 (einfache Genauigkeit)

$\Rightarrow$ Exzessdarstellung des Exponenten: $C = E + 127 = \sum_{i=0,\ldots,7} e_i 2^i$

Somit gilt abschließend für $z(S, C, m)$ in einfacher Genauigkeit:

$$z = (-1)^s \cdot (1 + \sum_{i=-1}^{-23} m_i 2^i) \cdot 2^{(\sum_{i=0}^{7} e_i 2^i - (2^7 - 1))}$$

S	e_7 e_6 ... e_0	m_{-1} m_{-2} ... m_{-23}

Übungen

Bearbeite selbständig die vorbereiteten Übungen.
Nutze Kontrollmöglichkeiten (Gleitkommazahlumrechner)!

Individuelle Hilfe (durch mich) möglich. Bitte melden.