**Erweiterungsgrundkurs**

# Relativitätstheorie

HHGym-Physik

Stand 5. März 2021

# Inhaltsverzeichnis

**1. Historie** **1 - 3**
1.1. Krise der Physik zu Beginn des 20. Jahrunderts . . . . . 1 - 3
1.2. Warum Relativitätstheorie? . . . . . 1 - 3
1.3. Einstein . . . . . 1 - 4

**2. Newtonsche Relativität** **2 - 1**
2.1. Wichtige Begriffe . . . . . 2 - 1
2.2. Galilei-Transformation . . . . . 2 - 1
2.3. Schlussfolgerungen . . . . . 2 - 2

**3. Grenzgeschwindigkeit** **3 - 1**

**4. Das Michelson-Morley-Experiment** **5 - 1**

**5. Theorien zur Rettung der Äthertheorie** **5 - 1**

**6. Die Lichtuhr** **6 - 1**
6.1. Zeitdilatation . . . . . 6 - 2
6.2. Synchronisation zweier Uhren . . . . . 6 - 3
6.3. Synchronisation zweier Uhrenpaare . . . . . 6 - 4
6.4. Längenmessung . . . . . 6 - 5

**7. Minkowski-Diagramme** **7 - 1**
7.1. Raum-Zeit-Diagramme . . . . . 7 - 1
7.2. Besondere Linien . . . . . 7 - 1
7.3. Das zweite Bezugssystem . . . . . 7 - 2
7.4. Maßstabsbestimmung im Minkowski-Diagramm . . . . . 7 - 5

**8. Zwillingsparadoxon** **8 - 1**

**9. Relativistischer Dopplereffekt** **9 - 2**

**10. Lorentz-Transformatition** **11 - 1**
10.1. Bedingungen . . . . . 11 - 1
10.2. Herleitung der Ortskoordinatentransformation . . . . . 11 - 1
10.3. Transformation der Zeit . . . . . 11 - 1

**11. Geschwindigkeitsaddition** **11 - 2**

**12. Hyperlichtsignale** **12 - 1**

**13. Relativistische Dynamik** **14 - 1**
13.1. Relativistische Massenzunahme . . . . . 14 - 1

**14. Energie-Masse-Äquivalenz** **14 - 2**

**A. Arbeitsplan Erweiterungsgrundkurs Relativitätstheorie** **i**

# 1. Historie

## 1.1. Krise der Physik zu Beginn des 20. Jahrunderts

- Entdeckung (Identifizierung) des Elektrons (Thompson 1897)
- Röntgenstrahlen (1895)
- Stabilität der Atome
- Emission von Linienspektren durch energetisch angeregte Atome
- Was hält die Sonne am Laufen? - d.h. woher kommt die ünerschöpflicheËnergie mit der sie uns mit Licht und Wärme versorgt?
- Woraus bestehen eigentlich Atome?
- Was bestimmt die mechanischen Eigenschaften der Metalle?
- Beschreibung der Versuchsergebnisse zur Wärmestrahlung
- negativer Ausfall des Michelson-Morley-Experimentes zum Nachweis des Äthers

## 1.2. Warum Relativitätstheorie?

Bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts galt trotzdem unumstritten die Newtonsche Mechanik.

Newton 1687: „Philosophiae Naturalis Principa Mathematica“ war die Grundlage des des Lehrgebäudes der Mechanik, Optik, E-Lehre,...

Man glaubte, bis auf obige „kleine“ Fragen gäbe es kaum offene Fragen der Physik.

Eine Komponente ist die uns geläufige Geschwindigkeitsaddition. Man hatte feste Vorstelungen über Raum und Zeit.

James Clerk Maxwell (1864): Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen beträgt $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_0}}$

Können auch Teilchen diese Geschwindigkeit erreichen?

**Aufgabe 1.1: Geschwindigkeit beschleunigter Elektronen?**

Welche Geschwindigkeit erreichen Elektronen, die ein Potentialgefälle von

a 10 MeV

b 40 MeV

durchlaufen?

**Aufgabe 1.2: Bahnkümmung im magnetischen Feld**

Welcher Krümmungsradius müsste sich ergeben, wenn das 10 MeV-Elektron senkrecht zu den Feldlinien eines magnetischen Feldes von $B = 2,0\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$ fliegt?

Das 40 MeV-Elektron hätte 1,9976 c schnell sein müssen, das experimentelle Ergebnis beträgt aber nur 0,9999 c.

Das 10 MeV-Elektron müsste eine Kurve von $r = 0,53\,\mathrm{cm}$ durchfliegen müssen, experimentel sind es jedoch $1,8\,\mathrm{cm}$.

Die Newtonschen Gleichungen scheinen für große Geschwindigkeiten $v \to c$ nicht mehr zu gelten.

## 1.3. Einstein

wollte mehr über das Wesen der Elektrodynamik herausfinden.

1905 veröffentlichte er Werke zur

- Quantentheorie des Lichtes
- statistischen Betrachtungen zur Molekulartheorie und
- die spezielle Relativitätstheorie.

Die SRT war zunächst nur eine Theorie. Sie brachte nichts neues, da Zeitdilatation und Längenkontraktion nicht experimentell überprüfbar waren.

Noch 1916 wurde Einstein von Besuchern der Literarischen Gesellschaft in Berlin gefragt: „Also bitte, Herr Einstein, was bedeutet Potential, invariant, kontrainvariant, Energietensor, Skalar, Relativitätspostulat, hypereuklidisch und Inertialsystem? Können Sie das ganz kurz erklären?“

„Ja – das sind Fachausdrücke.“

(Hier wäre vielleicht ein Vortrag über die Biographie möglich.)

# 2. Newtonsche Relativität

## 2.1. Wichtige Begriffe

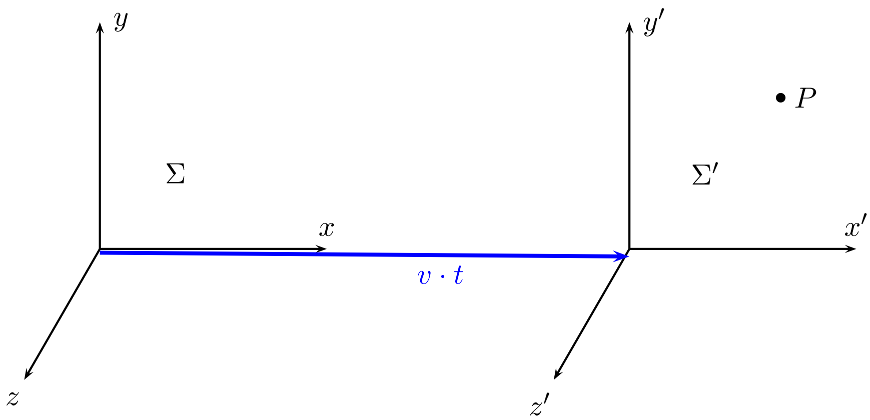
**Bezugssystem:** Festlegung eines Koordinatensystems (z.B. Beobachterstandort)
Festlegung der Koordinatenachsen $(x, y, z)$

**Ereignis:** etwas, das unabhängig von dem zu seiner Beschreibung benutzten Bezugssystem eintritt

**Inertialsystem:**
- Bezugssystem, in dem das Newtonsche Trägheitsgesetz gilt
(z.B. antriebslos fliegendes Raumschiff weitab jeglicher Massen)
Im Allgemeinen kann auch die Eigendrehung der Erde vernachlässigt werden, um ein Inertialsystem zu erhalten.
- Jedes Bezugssystem, das sich relativ zu einem Inertialsystem geradlinig gleichförmig bewegt (oder ruht), ist auch ein Inertialsystem.

## 2.2. Galilei-Transformation

Wie kann man nun berechnen, welche Koordinaten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen ein Ereignis in einem jeweils anderen Inertialsystem besitzt?




Seien zwei Inertialsysteme $\Sigma$ und $\Sigma'$ gegeben. Zur Zeit $t = 0$ liegen beide Systeme genau aufeinander. $\Sigma'$ bewege sich mit $\vec{v}$ (der Einfachheit halber entlang der $x$-Achse) von $\Sigma$ weg. Nach der Zeit $t$ hat sich $\Sigma'$ um die Strecke $v \cdot t$ fortbewegt. Die Maßstäbe seien in beiden Systemen gleich. Unsere tägliche Erfahrun zeigt, dass sich diese Maßstäbe uch bei Bewegung nicht ändern.

Sind nun auch die Koordinaten eines Ereignisses $P$ gegeben mit $(x, y, z)$ in $\Sigma$ und mit $(x', y', z')$ in $\Sigma'$, so lassen sich bei Kenntnis der einen Koordinaten die im anderen System berechnen:

### Transformation der Koordinaten

$$x' = x - vt \quad \text{bzw. } x = x' + vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

### Räumlicher Abstand zwischen zwei Punkten A und B

$$\begin{aligned} x'_A &= x_A - vt \qquad \Longrightarrow \qquad & x'_B - x'_A &= x_B - vt - (x_A - vt) \\ x'_B &= x_B - vt & &= x_B - x_A \end{aligned}$$

Der Abstand ist also in beiden Systemen gleich (invariant).

### Transformation der Geschwindigkeiten

$v$ sei die Geschwindigkeit von $\Sigma'$ bzgl. $\Sigma$.
$u$ sei die GFeschwindigkeit eines Objektes in $\Sigma$.
$u'$ sei die GFeschwindigkeit eines Objektes in $\Sigma'$.

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \qquad \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right. \\ \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} \\ u'_x &= u_x - v \end{aligned}$$

Da ist die bekannte Geschwindigkeitsaddition. Die Transformation der anderen Komponenten $(y, z)$ erfolgt analog.

### Transformation der Beschleunigung

$u$ und $u'$ mögen sich zeitlich ändern, die Objekte sich also beschleunigt bewegen.

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x - v \qquad \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right. \\ \frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} - \underbrace{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}_{0} \\ a'_x &= a \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach Transformation von $y$- und $z$-Komponente

$$\begin{aligned} \vec{a'} &= \vec{a} \qquad | \cdot m' = m \\ m\vec{a'} &= m\vec{a} \\ \vec{F'} &= \vec{F} \end{aligned}$$

Die Newtonschen Bewegungsgesetze sind nach Auffassung der klassischen Physik in allen Inertialsystemen völlig gleichwertig.

## 2.3. Schlussfolgerungen

Man kann nun testen, dass sich Impulse, Energien, Drehimpulse in verschiedenen Inertialsystemen unterscheiden.

Aus den Newton-Gesetzen folgen aber die entsprechenden Erhaltungssätze.

Die Änderungen dieser Größen aus Sicht unterschiedlicher Inertialsysteme bleiben jedoch gleich, die Erhltungssätze sind invariant.

Alle so zu beschreibenden Kräfte (Gravitation, Elektrostatik, Kräfte in Molekülen, starre oder elastische Körper, Hydrodynamik) weisen Gemeinsamkeiten auf:

- Wechselwirkungen erfolgen immer paarweise.
- Kraft und Gegenkraft wirken entlang de Verbindungslinie der interagierenden Körper.

- Der Betrag der Kraft hängt von der Entfernung der Körper ab. (außer starke Kernkraft)
- Nur die E-Dynamik (Lorentz-Kraft) tanzt aus der Reihe. Sie wirkt nicht auf der Verbindungslinie und hängt von der Geschwindigkeit ab.

Trotzdem folgt:

- Man kann aus keinem Experiment, das vollständig in einem Inertialsystem abläuft, Aussagen über die Bewegung dieses Systems bzgl. anderer Inertialsystemen machen.
- Es gibt keine Möglichkeit, die absolute Geschwindigkeit eines Inertialsystems aus mechanischen Experimenten zu bestimmen.

Newtonsche Relativität: Es gibt keine absoluten, nur relative Geschwindigkeiten.

# 3. Grenzgeschwindigkeit

Obwohl alle drei Theorien ihre Befürworter hatten, gaben zwei Experimente entscheidende Impulse:

- Das Michelson-Morley-Experiment (1881 und 1887) zum Nachweis des Äthers,
- das Experiment von Kaufmann (1901) und Bertozzi zur Ermittlung der Geschwindigkeit schneller Elektronen.

# 4. Das Michelson-Morley-Experiment

siehe Präsentation: *Rela-Michelson-Exp.pdf*

# 5. Theorien zur Rettung der Äthertheorie

siehe Präsentation: *Auswert-Michelson-Exp.pdf*

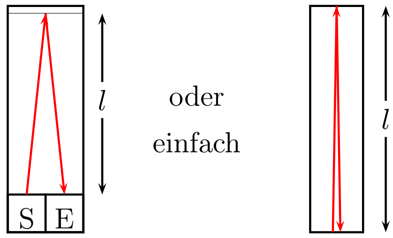
# 6. Die Lichtuhr

Relativistische Effekte werden i.d.R. erst bei großen Geschwindigkeiten $v > \frac{1}{10}c$ relevant. Deswegen braucht man genaue Uhren. Außerdem ist es günstig ein Uhrenprinzip zu wählen, welches auf der **Grundannahme der SRT** beruht, nämlich der **Konstanz der Lichtgeschwindigkeit**. Dieses besagt genauer, dass

..........................................................................................

..........................................................................................

Dieses Kriterium erfüllt eine Lichtuhr.
Sie hat eine definierte Länge $l$. Der Sender S schickt einen Lichtstrahl zum Spiegel R und kommt zurück zum Empfänger E. Soll der Strahl nach 1 s wieder zurück sein, muss die Uhr $l = 150\,000\,\text{km}$ lang sein.




Für spätere Anwendungen könnte folgende Übersicht ganz hilfreich sein:
Das Licht legt in der folgenden Zeit den entsprechenden Weg zurück.

| Zeit | Weg |
|---|---|
| 1 a | $1\,\text{Ly} = 9,46 \cdot 10^{15}\,\text{m}$ |
| 1 s | $300\,000\,\text{km} = 1\,\text{Ls}$ |
| 1 ns | $0,3\,\text{m} = 1\,\text{nLs}$ |
| 10 ns | 3 m |
| 100 ns | 30 m |
| $1\,\mu$s | $300\,\text{m} = 1\,\mu\text{Ls}$ |
| | |
| | |
| | |

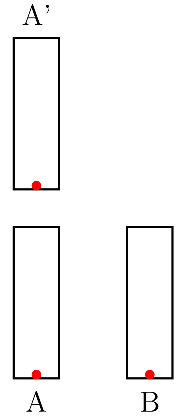
## 6.1. Zeitdilatation

Nun wollen wir einige Lichtuhr-Experimente durchführen.

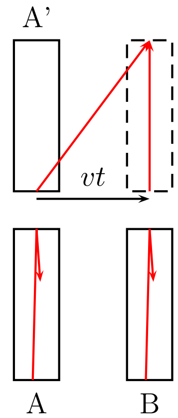
1. Eine Lichtuhr A' ruht im BS $\Sigma'$ und bewegt sich im BS $\Sigma$ mit der Geschwindigkeit $v$. In dieser Uhr bewegt sich der Lichtstrahl 1 Sekunde. Dabei legt die Uhr in $\Sigma$ die Strecke $v \cdot t$ zurück. Aus Sicht von $\Sigma$ bewegt sich der Lichtstrahl schräg. Zum genauen Uhrenvergleich zwischen $\Sigma$ und $\Sigma'$ benötigt $\Sigma$ noch Uhren an den Orten wo die Uhr A' vorbeikommt, z.B. A und B.

   Zu Beginn stehen alle Uhren auf 0.
   Nach $0,5\,\mathrm{s}$ ist der Strahl in A' nach oben gewandert und A' selber bei B angekommen.
   In beiden Systemen ist das Ereignis dasselbe: „Lichtstrahl ist in A' oben angekommen "
   Aus Sicht von $\Sigma$ ist dieser Strahl aber schräg gelaufen. Die Strahlen in A und B haben den gleichen Weg wie der schräge Strahl von A'.
   Die Uhren in $\Sigma$ zeigen also mehr Zeitverlauf an als A'. Der Weg des schrägen Strahls in $\Sigma$ und des geraden Strahls in $\Sigma'$ ist eigentlich in beiden Systemen $c \cdot t$. Da die Wege offensichtlich verschieden lang sind, $c$ in beiden Systemen gleich ist, können nur noch die Zeiten unterschiedlich sein, was die Uhren ja auch anzeigen. In $\Sigma$ vergeht die Zeit $t$ und in $\Sigma'$ die Zeit $t'$.

   Für die Wege von A' und des Lichtstrahls in A' aus Sicht der beiden Systeme ergibt sich ein rechwinkliges Dreieck und es folgt für $t$ und $t'$.




Alle Uhren stehen auf 0.



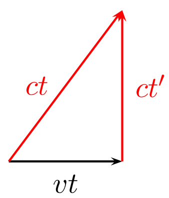

A' steht auf 0.5 s

$$(ct)^2 = (ct')^2 + (vt)^2$$

$$(ct')^2 = (ct)^2 - (vt)^2$$

$$t' = t \cdot \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}$$

und schließlich $$t' = Dst \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

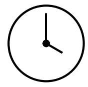



Man **könnte voreilig** schlussfolgern, dass in bewegten Systemen die Zeit um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ langsamer vergeht. Da $\Sigma'$ ebenso das ruhende System sein kann, das Ereignis „A' zeigt $0,5\,\mathrm{s}$ und B zeigt $0,5 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ an" gilt aber in beiden Systemen gleichermaßen, stimmt die Aussage so nicht.

Der Unterschied ist, dass A' alleine und A und B zu zweit sind. Die richtige Aussage der Zeitdilatation ist:

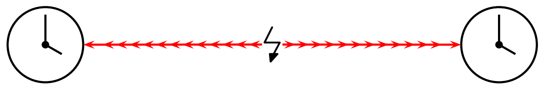
**Zeitdilatation**
Eine einzelne Uhr geht gegenüber einem Satz synchronisierten Uhren um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ nach.

## 6.2. Synchronisation zweier Uhren



Im Folgenden können die Uhren das Aussehen normaler Uhren haben.

Zwei Uhren lassen sich synchronisieren, indem man in der Mitte ein (Licht-)Signal zu den Uhren schickt, welches sie synchronisiert.

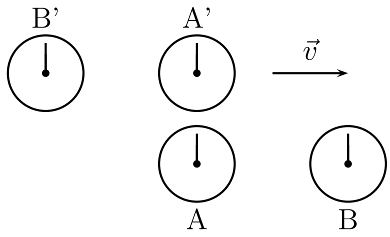


Man könnte auch von einer Uhr das Signal senden und die Laufzeit $t = \frac{s}{c}$ einberechnen.

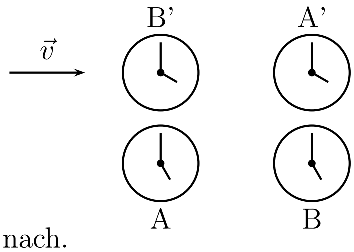
Nun erweitern wir Experiment 1. Uhr A' bekommt nun eine synchronisierte Uhr B'.

2. Begegnung zweier synchronisierter Uhrenpaare

   a) $\Sigma'$ bewegt sich in $\Sigma$ nach rechts




   - A und A' zeigen Null

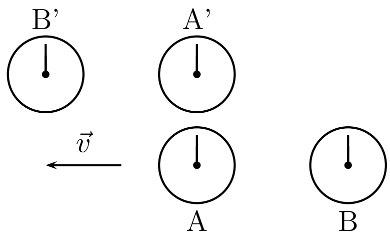



   - A' vergleicht sich mit B

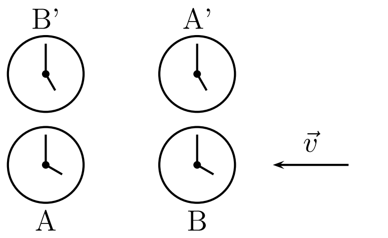
   Wie im ersten Experiment geht A' gegenüber B (und A) nach.

   Wer sich bewegt ist relativ.

   b) $\Sigma$ bewegt sich in $\Sigma'$ nach links.




   - A und A' zeigen Null




   - A vergleicht sich mit B'

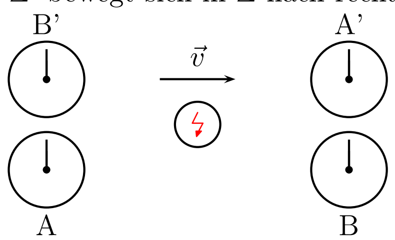
   Nun geht A gegenüber B' (und A') nach,
   völlig symmetrisch zum Teilversuch vorher.

   Trotzdem scheinen sich beide Teilversuche zu widersprechen, wenn man die gegenüberstehenden Uhren jeweils vergleicht.

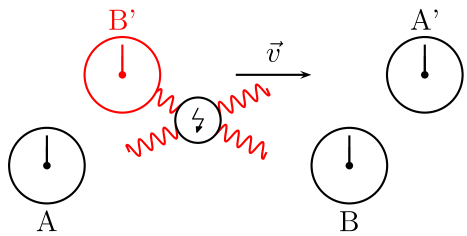
## 6.3. Synchronisation zweier Uhrenpaare

Nun sehen wir uns nur die Synchronisation beider Uhrenpaare genauer an und versuchen, beide Paare in einer Aktion zu synchronisieren. Die Uhren liegen sich genau gegenüber und in der Mitte wird das Synchronisierungssignal gezündet.

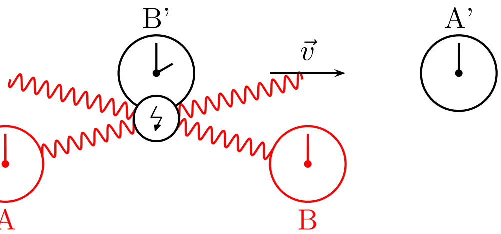
3. a) $\Sigma'$ bewegt sich in $\Sigma$ nach rechts.



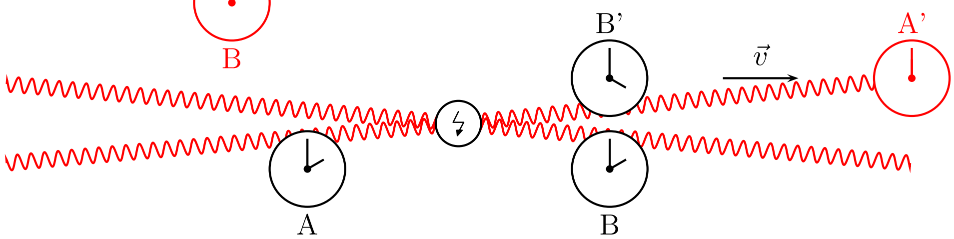

Signal zündet, wenn sich entsprechende Uhren gegenüber befinden.




Signal erreicht B’ zuerst und B’ startet.

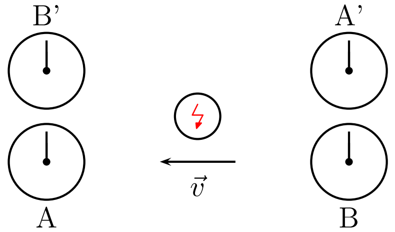



Signal erreicht A und B gleichzeitig.

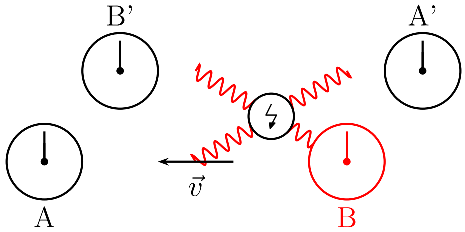



Signal erreicht A’ zuletzt, da es A’ nacheilen muss.

b) $\Sigma$ bewegt sich in $\Sigma'$ nach links.

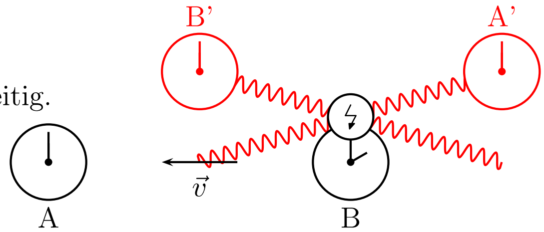


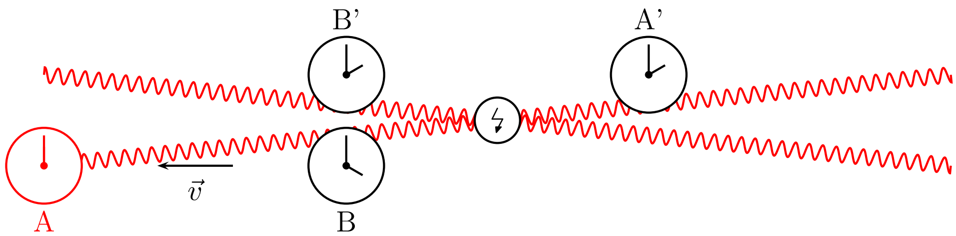

Signal zündet, wenn sich entsprechende Uhren gegenüber befinden.




Signal erreicht B zuerst und B startet.

Signal erreicht A und B gleichzeitig.




Signal erreicht A zuletzt, da es A nacheilen muss.

Beide Betrachtungen sind völlig symmetrisch. Immer wird erst die Uhr B des anderen Bezugssystems, dann die beiden eigenen Uhren (synchron) eingeschaltet und zum Schluss die Uhr A des anderen Systems. Jeder kann behaupten:

- Die eigenen Uhren sind synchronisiert.
- Die Uhren im zu mir bewegten Bezugssystem sind nicht synchronisiert.

Das nennt man die

**Relativität der Gleichzeitigkeit**
Zwei Ereignisse, die in dem einen Bezugssystem gleichzeitig geschehen, verlaufen in einem anderen Bezugsystem zeitlich nacheinander.

Egal, welche Szenarien man für das Synchronisieren zueinander bewegter Uhrenpaare man sich überlegt, es wird immer wieder auf das gleiche Problem hinauslaufen. Aus der Relativität der Gleichzeitigkeit folgt die Vorschrift für die

## 6.4. Längenmessung

**Längenmessung**
Ein räumlicher Abstand (Länge) wird gemessen, indem man die Raumkoordinaten zum gleichen Zeitpunkt bestimmt und dann die Differenz berechnet.

**Aufgabe 6.1: Längenessung**

Ein Raumschiff unbekannter Länge fliegt über die Beobachter C und D hinweg. Diese stehen im System $\Sigma$ $l_{\mathrm{C,D}} = 72\,\mathrm{m}$ voneinander entfernt. Im Bug des Raumschiffes sitzt ein Beobachter B', im Heck ein Beobachter H'. Sie haben die Konstruktionspläne des Raumschiffes verschusselt und kennen die Länge ihres Raumschiffes auch nicht. Die Uhren im jeweiligen Bezugssystem sind synchronisiert.

1. In $\Sigma$ vergehen $\Delta t_1 = 400\,\mathrm{ns}$, bis der Bug von C bis D gelangt ist.
   Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit $v$ zwischen den beiden Systemen?
2. In $\Sigma$ vergehen $\Delta t_2 = 200\,\mathrm{ns}$ bis das Raumschiff komplett Beobachter C überflogen hat.
   Auf welche Länge $l$ des Raumschiffes schließt C?
3. Die Raumschiffinsassen messen ihre Länge nun, indem sie die Zeit messen, in der sie den Beobachter C überfliegen.
   Welche Zeit $\Delta t_2'$ messen sie hierfür und welche Länge $l_0'$ des Raumschiffs in $\Sigma'$ ergibt sich hieraus?

**Lösung 6.1**

Die Bewegung ist wieder nur relativ.

1. $v = \dfrac{l_{\mathrm{A,B}}}{\Delta t_1} = \dfrac{72\,\mathrm{m}}{400\,\mathrm{ns}} = \dfrac{9}{50}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{ns}} = \dfrac{9}{50}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{ns}} \cdot \dfrac{c}{3\cdot 10^8}\,\dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}} = \dfrac{3}{5}c$
2. $l = v\Delta t_2 = \dfrac{3}{5}c \cdot 200\,\mathrm{ns} = 120\,\mathrm{nLs} = \dfrac{120\cdot 3\cdot 10^8}{10^9}\,\dfrac{m\cdot s}{s} = 36\,\mathrm{m}$

3. Die synchronisierten Uhren B und H vergleichen sich mit der einzelnen Uhr C. Die einzelne Uhr geht nach. (Zeitdilatation)

$$\Delta t_2 = \Delta t_2' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
$$\Delta t_2' = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{200\,\text{ns}}{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \frac{200\,\text{ns}}{\frac{4}{5}} = 250\,\text{ns}$$
$$l_0' = v \cdot \Delta t_2' = 250\,\text{ns} \cdot \frac{3}{5}c = 150\,\text{nLs} = \frac{150 \cdot 3 \cdot 10^8}{10^9}\,\frac{\text{s} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 45\,\text{m}$$

---

**Längenkontraktion**
In ihrem Ruhesystem wird eine Länge größer gemessen als in einem zu ihr bewegten System. Im bewegten System wird sie um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ kürzer gemessen.

**Aufgabe 6.2: Raumschiffflotte**

Eine Flotte von drei Raumschiffen fliegt mit zueinander gleichen Abständen geradlinig gleichförmig durch die Galaxie. Der Flottenkommandant befindet sich im mittleren Schiff. Auf Grund der ihm bekannten taktischen Lage muss die Flotte ihr Tempo erhöhen.Der Kommandant kennt die Abstände seiner Raumschiffe, also auch die Laufzeit eines Signals. Er gibt den Befehl „*Sofort Tempo verdoppeln!*“und erhöht nach dieser Zeit selbst die Geschwindigkeit.

Wie verläuft das Manöver

1. aus Sicht des Flottenkommandanten,
2. aus Sicht eines äußeren Beobachters?

Was würde passieren,

3. wenn die Flotte bremsen müsste?

**Lösung 6.2**

1. Aufgrund derselben Laufzeit des Signals nach vorne und hinten und dessen Berücksichtigung durch das mittlere Raumschiff beschleunigen alle drei gleichzeitig und die Abstände bleiben gleich.

2. Das hintere Raumschiff beschleunigt zuerst (fliegt dem Signal entgegen), dann das mittlere und zum Schluss das vordere (muss erst vom Signal eingeholt werden). Die Abstände verkleinern sich.

   Zusatzfrage: Wann bohrt sich ein hinteres in ein vorderes Raumschiff?

   Gar nicht, denn das müsste aus Sicht der Flotte ja genauso geschehen. Außerdem verkürzen sich aus Sicht von außen auch die Schiffe.

3. Aus Flottensicht bremsen alle gleichzeitig, Abstände ändern sich nicht.
   Von außen gesehen bremst wieder zuerst das hintere, dann das mittlere und zuletzt das erste Schiff. Die Abstände werden länger, ebenso wie die Schiffe.

**Aufgabe 6.3: Raumschiffbegegnung**

In Bug und Heck eines Raumschiffes der Länge $l_{0,1} = 2,4\,\text{km}$ seien Beobachter mit synchronisierten Uhren untergebracht. Von vorn kommt ein zweites Raumschiff auf das erste zu und fliegt dicht daran vorbei. Jeder der Beobachter misst die Zeiten, zu denen Bug und Heck des zweiten Raumschiffs an ihm vorübergleiten.
Die Messergebnisse lauten:

| Ereignis | Beobachter in R1 | sieht von R2 | *zur Zeit* |
|---|---|---|---|
| A | Bug | Bug | $0\,\mu\text{s}$ |
| B | Bug | Heck | $6\,\mu\text{s}$ |
| C | Heck | Bug | $10\,\mu\text{s}$ |
| D | Heck | Heck | ? |

Berechne

1. die Relativgeschwindigkeit beider Raumschiffe,
2. die Länge $l_2$ des zweiten Raumschiffes aus Sicht von R1,
3. die Ruhelänge $l_{0,2}$ von Raumschiff R2,
4. die fehlende Messzeit für Ereignis D.
5. Welche Zeiten messen Bug und Heckposten des zweiten Raumschiffes R2 für die Ereignisse A, B, C und D, wenn A ebenfalls zur Zeit $0\,\mu\text{s}$ stattfindet?
   Vergleiche die Reihenfolge der Ereignisse aus Sicht der beiden Raumschiffe und interpretiere das Ergebnis.

# 7. Minkowski-Diagramme

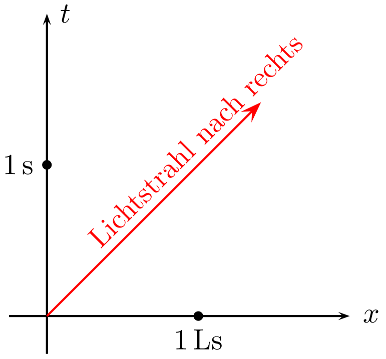
## 7.1. Raum-Zeit-Diagramme

Die betrachteten Vorgänge werden klarer, wenn man sie in Raum-Zeit-Diagrammen veranschaulichen kann. Insbesondere kann man die Sicht aus unterschiedlichen Bezugssystemen darstellen.

Wir vereinbaren:

- Es wird nur eine Raumkoordinate beachtet, die $x$-Achse.
- Die Vertikalachse sei die Zeitachse, die Horizontalachse die $x$-Achse.
- Die Maßstäbe auf beiden Achsen sind so, dass ein Lichtstrahl eine 45°-Linie ergibt. Dies erreicht man z.B. mit folgenden Einheitsgrößen:

| Zeiteinheit | Ortseinheit | |
|---|---|---|
| | in Lichteinheiten | in Metern o.ä. |
| 1 s | 1 Ls | $3 \cdot 10^8$ m |
| 1 min | 1 L min | $18 \cdot 10^9$ m |
| 1 $\mu$s | 1 $\mu$Ls | 300 m |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 10 ns | 10 nLs | 3 m |
| 100 ns | 100 nLs | 30 m |



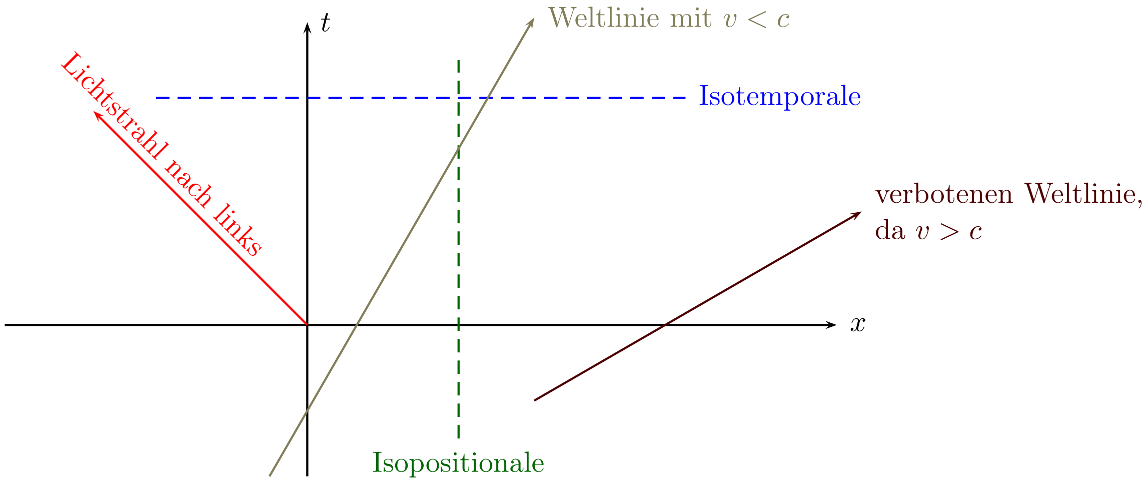

## 7.2. Besondere Linien

Jede Linie, die die räumliche und zeitliche Bewegung eines Objektes beschreibt, nennt man eine *Weltlinie*.
Im Diagramm oben haben wir bereits die Weltlinie eines Lichtstrahls, beginnend am Ort $x = 0$ zur Zeit $t = 0$.

Verläuft eine Weltlinie parallel zur $t$-Achse, so ruht das Objekt am gleichen Ort, also auch in dem betrachteten Bezugssystem.

Linien, die Zeitpunkte am gleichen Ort verbinden, nennt man *Isopositionale*.

Linien, die parallel zur $x$-Achse verlaufen, verbinden Ereignisse, die zur gleichen Zeit stattfinden. Solch eine Linie ist eine *Isotemporale*.



## 7.3. Das zweite Bezugssystem

Das Bezugssystem $\Sigma$ habe die Achsen $x$ und $t$. Nun suchen wir die Achsen $x'$ und $t'$ des Bezugssystems $\Sigma'$.

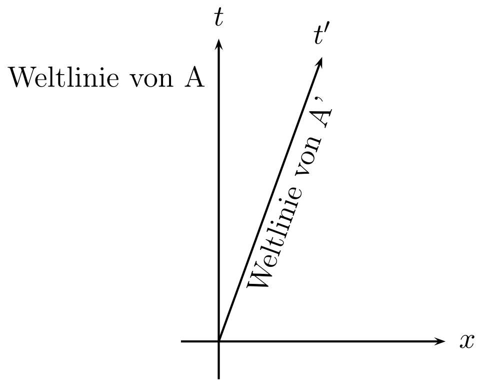
### Die $t'$-Achse

Dazu machen wir uns folgendes klar:

Die $t$-Achse ist auch die Weltlinie eines Beobachters A (mit Uhr), der in $\Sigma$ am Ort $x = 0$ ruht.

Nun bewegt sich ein zweiter Beobachter A' (mit Uhr) mit der Relativgeschwindigkeit $v$ an A vorbei. Im Moment der Begegnung zeigen beide Uhren die Zeit 0 an. A' kann annehmen, sich in seinem Bezugssystem $\Sigma'$ am Ort $x' = 0$ zu befinden, also dort zu ruhen.

Also ist die Weltlinie von A' die $t'$-Achse von $\Sigma'$.




### Die $x'$-Achse

Für die Lage der $x'$-Achse gibt es zunächst mehrere Ideen:

1. Die $x'$-Achse liegt auf der $x$-Achse.

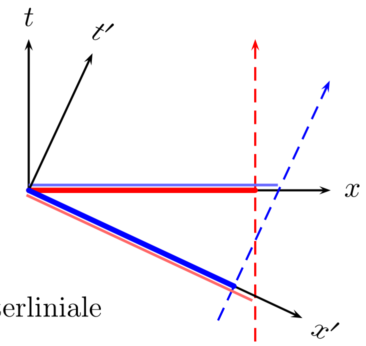
   Dagegen spricht z.B., dass es dann keine Längenkonstraktion gäbe, da beiden denselben Maßstab benutzen.

   Man könnte verschiedene Maßstäbe einzeichnen, dann wäre die Längenkontraktion nicht symmetrisch. Eine Länge wäre nicht in ihrem Ruhesystem am größten.

2. Die $x'$-Achse liegt im rechten Winkel zur $t'$-Achse.

   Nehmen wir an, die Metrik sein auf beiden Achsen gleich. Dann würde jeder einen Meterstab, der im anderen System ruht, zu lang messen (statt zu kurz).

   Eine einseitige Veränderung der Metrik würde wiederum die Symmetrie verletzen.

   Die dicken roten und blauen Linien sein die ruhenden Meterliniale in $\Sigma$ bzw. $\Sigma'$.

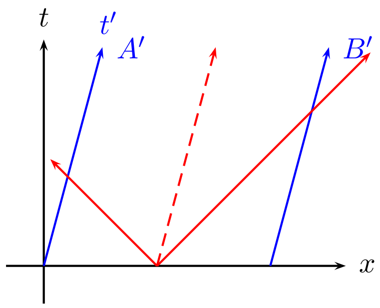
   Die gestrichelten Linien sind dann die Weltlinien der Linealrenden.

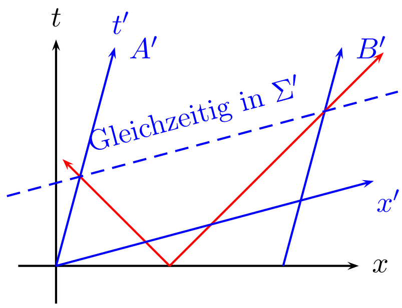
   $\Sigma$ misst das andere Lineal auf seiner $x$-Achse (einer Isotemporalen). Dort werden Anfang und Ende zur gleichen Zeit erfasst. (dünne blaue Linie)
   Das $\Sigma'$-Lineal ist länger als das $\Sigma$-Lineal im Widerspruch zur Längenkontraktion.

   Umgedreht ergibt sich das analoge Ergebnis. (dünne rote Linie)

3. Wir konstruieren die $x'$-Achse als echte Isotemporale in $\Sigma'$.

   Dazu synchronisieren wir zwei Uhren in $\Sigma'$.




   Die Weltlinien der Uhren $A'$ und $B'$ sind in $\Sigma$ geneigte Linien (blau).

   Genau in der Mitte befindet sich die Weltlinie einer Lampe, die die beiden Uhren synchronisieren soll. (rot, wobei man diese Weltlinie weglassen könnte.)

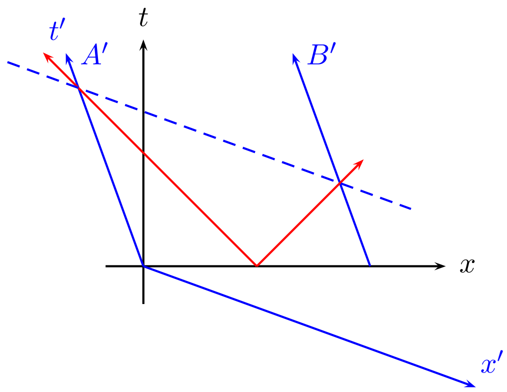
   Zwei Lichtstrahlen gehen nach rechts und links, um die gleichweit entfernten Uhren zu synchronisieren.

   In $\Sigma'$ werden nun beide Uhren gleichzeitig eingeschaltet. Also ist die Verbindungslinie dieser beiden Uhren eine Gleichzeitigkeitslinie in $\Sigma'$.

   Die Parallele durch den Koordinatenursprung ist unsere $x'$-Achse.

Der Winkel zwischen $t'$- und $t$-Achse ist gleich dem Winkel zwischen $x$- und $x'$-Achse.

Falls sich $\Sigma'$ nach links bewegt, ergibt sich folgendes Bild.




**Lösung 6.3**

1. Der Bug von R2 bewegt sich $10\,\mu$s entlang der Länge des ersten Raumschiffes R1.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2,4\,\text{km}}{10\,\mu\text{s}} = 2,4 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,4 \cdot \frac{10^8\,\text{m} \cdot c}{s \cdot 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,8\,c$$

2. Bug und Heck von R2 sind nicht gleichzeitig bei zwei Beobachtern in R1. Dswegen müssen wir rechnen. Das Raumschiff R2 benötigt $\Delta t_{AB} = 6\,\mu$s um mit $v = 0,8\,c$ am Bug von R1 vorbeizufliegen.

$$l_2 = v \cdot \Delta t_{AB} = 2,4 \cdot 10^5\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 6 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = 1,44\,\text{km}$$

3. Nach der Formel für die Längenkontraktion folgt $l_{0,2} = \dfrac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{1,44\,\text{km}}{0,6} = 2,4\,\text{km}$

   Beide Raumschiffe wären im gleichen Ruhesystem gleich lang.

4. $\Delta t_{A,B} = \Delta t_{C,D} = 6\,\mu\text{s}$, also $t_D = 16\,\mu\text{s}$

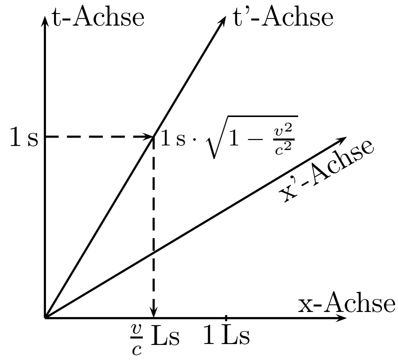
5. Aus der Gleichwertigkeit beider Systeme und den gleiche Längen folgt der analoge zeitliche Ablauf. Lediglich die beiden Ereignisse B und C sind vertauscht.

---

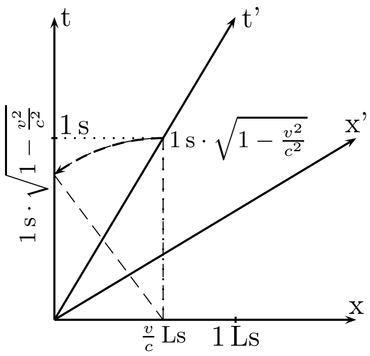
Nun fehlen nur noch die Maßstäbe auf den $\Sigma'$-Achsen. Man könnte diese berechnen, im folgenden Kapitel werden wir sie konstruieren und dabei gleichzeitig die Berechnung erkennen.

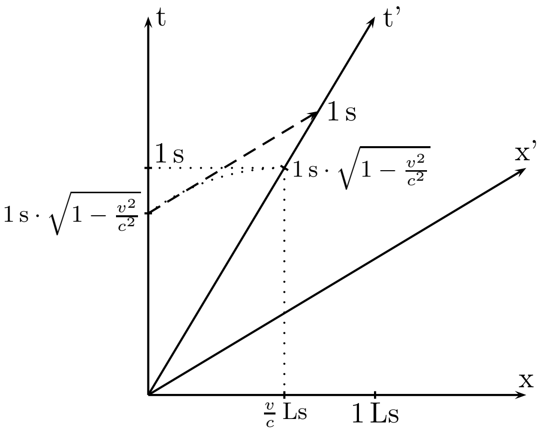
## 7.4. Maßstabsbestimmung im Minkowski-Diagramm

Nachdem die Koordinatenachsen des $\Sigma$- und $\Sigma'$-Systems gezeichnet wurden, werden die Einheiten für die x-Achse ($e_x = 1\,\mathrm{LS}$) und die t-Achse ($e_t = 1\,\mathrm{s}$) festgelegt. Gleichzeitig hat $e$ noch die Bedeutung $e\,\mathrm{cm}$, d.h. die gezeichnete Länge auf der jeweiligen Koordinatenachse.
Nun sind die $e'$-Längen für die $t'$-Achse bzw. analog die $x'$-Achse gesucht.
Dazu zeichnet man eine Waagerechte (Isotemporale in $\Sigma$) von $e_t$ auf die $t'$-Achse. Wegen der Zeitdilatation muss dort $1\,\mathrm{s}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ stehen. Von diesem erhaltenen Punkt fällt man das Lot auf die $x$-Achse. Dort muss nun $\frac{v}{c}\,\mathrm{Ls}$ stehen, denn soweit ist ein Objekt mit der $t'$-Achse als Weltlinie in $t = 1\,\mathrm{s}$ gekommen.



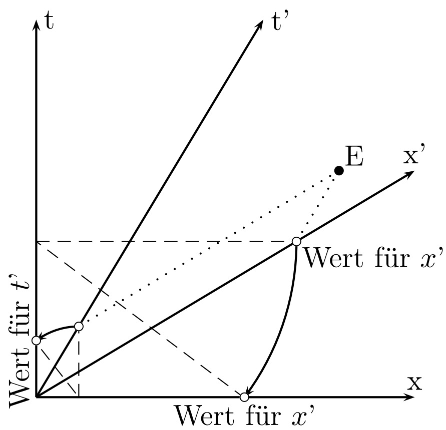

Nun nimmt man die Länge dieses Lotes ($e\,\mathrm{cm}$) in die Zirkelspanne und schlägt einen Kreisbogen um den Fußpunkt des Lotes bis zur $t$-Achse. Der nun erhaltene Punkt hat wegen dem Satz des Phytagoras vom Nullpunkt den Abstand $\sqrt{(e\,\mathrm{cm})^2 - \frac{v}{c}\cdot(e\,\mathrm{cm})^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot e\,\mathrm{cm}$. Das heißt nun aber, dass an dieser Stelle der $t$-Achse der Wert $1\,\mathrm{s}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ steht.




Zeichnet man von diesem Punkt aus eine Parallele zur $x'$-Achse (Isotemporale in $\Sigma'$) bis zur $t'$-Achse, so muss wegen des Relativitätsprinzips an der $t'$-Achse dort $1\,\mathrm{s}$ stehen.
Man erkennt auch die Gleichwertigkeit beider Bezugssysteme. Blickt man im $\Sigma$-System entlang einer Gleichzeitigkeitslinie (Parallele zur $x$-Achse) bei $t = 1\,\mathrm{s}$ auf die $x'$-Achse, so steht dort $t' = 1\,\mathrm{s}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Sieht man in $\Sigma$' von $t' = 1\,\mathrm{s}$ parallel zur $x'$-Achse auf die $x$-Achse, so steht dort $t = 1\,\mathrm{s}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Meist legt man sich ja auf die $t$-Achse und auf die $x$-Achse einen günstigen Maßstab. Der Maßstab im $\Sigma$'-System ist dann nicht mehr so leicht abzulesen. Über den bereits verwendeten Kreisbogen kann man $\Sigma$'-Koordinaten an den bequemeren $\Sigma$-Achsen ablesen.
Dazu muss man erst die Koordinaten eines Ereignisses im $\Sigma$'-System markieren, die entsprechenden Fußpunkte der Lote suchen, dann den Kreisbogen auf die $x$-Achse oder $t$-Achse schlagen und dort den Wert ablesen.



**Aufgabe 7.1: Signalreflexion**

Ein Raumschiff R passiert zur Bordzeit $t'_0 = 0$ eine Raumstation S mit der Relativgeschwindigkeit $v = \frac{3}{5}c$. Deren Uhr zeigt in diesem Moment ebenfalls $t = 0$ an.

- Nach 1 Stunde Raumschiffzeit sendet das Raumschiff ein Signal zur Station. ($E_1$)
- Diese antwortet sofort. ($E_2$)
- Das Antwortsignal erreicht wieder das Raumschiff. ($E_3$)

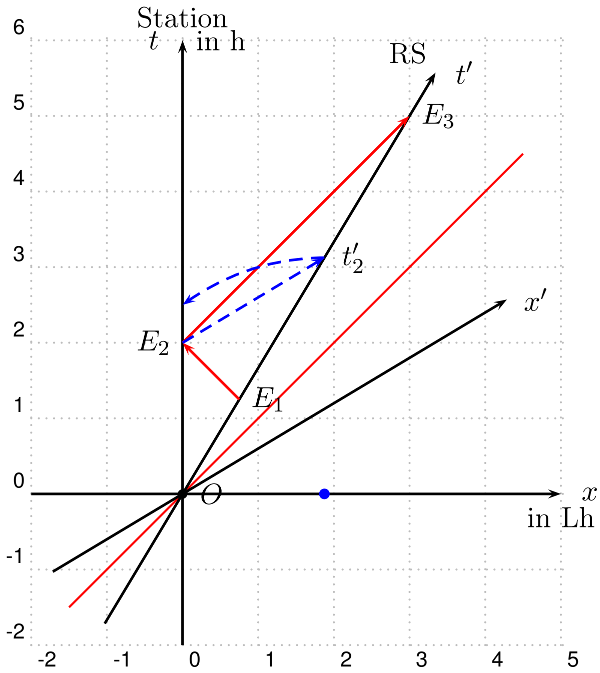
Wie lauten die Zeit- und Ortskoordinaten für alle Ereignisse in beiden Bezugssystemen? (Ortsangaben können in Ls oder Lh angegeben werden.)

Stelle die Ereignisse in Minkowski-Diagrammen dar, einmal bekommt $\Sigma$ (die Raumstation) das rechtwinklige System und einmal $\Sigma'$ (das Raumschiff).

**Lösung 7.1**

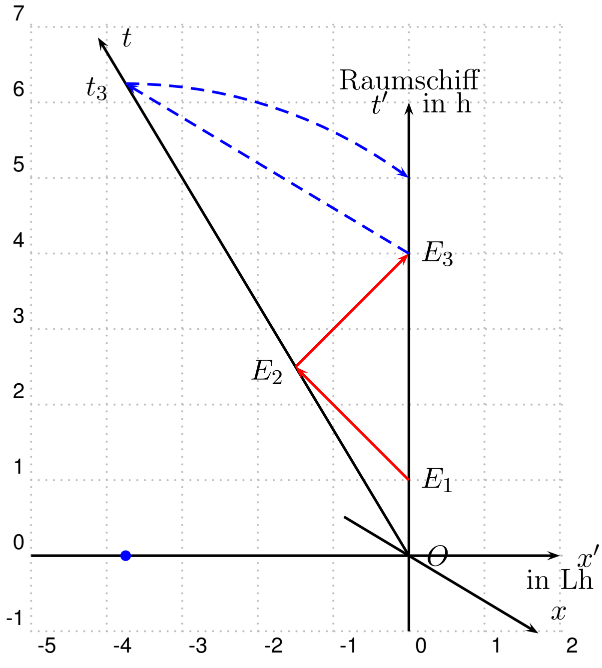
| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{E_1}:$ | $t'_1 = 1\,\mathrm{h}$ | lt. Aufgabenstellung |
| | $x'_1 = 0$ | da $E_1$ auf der $t'$-Achse liegt |
| | $t_1 = \dfrac{t'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{1\,\mathrm{h}}{\sqrt{\frac{25-9}{25}}} = 1\,\mathrm{h}\cdot\dfrac{5}{4} = 1{,}25\,\mathrm{h}$ | Zeitdilatation |
| | $x_1 = v\cdot t_1 = \dfrac{3}{5}c\cdot\dfrac{5}{4}\,\mathrm{h} = \dfrac{3}{4}\,\mathrm{Lh}$ | Entfernung des Raumschiffs von der Station. |
| $\mathbf{E_2}:$ | $\Delta t_{1-2} = \dfrac{x_1}{c} = \dfrac{3}{4}\dfrac{\mathrm{Lh}}{c} = \dfrac{3}{4}\,\mathrm{h}$ | Zeit zwischen $E_1$ und $E_2$ |
| | $t_2 = t_1 + \Delta t_{1-2} = \dfrac{5}{4}\,\mathrm{h} + \dfrac{3}{4}\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}$ | |
| | $t_2 = t'_2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ | Zeitdilatation aus Sicht des Raumschiffes |
| | $t'_2 = \dfrac{t_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2\,\mathrm{h}\cdot\dfrac{5}{4} = 2{,}5\,\mathrm{h}$ | |
| | $x_2 = 0$ | da $E_2$ auf der $t$-Achse liegt |
| | $x'_2 = -v\cdot t'_2 = -\dfrac{3}{4}c\cdot\dfrac{5}{2}\,\mathrm{h}? - 1{,}5\,\mathrm{Lh}$ | Entfernung der Station vom Raumschiff zur Zeit von $E_2$ |
| $\mathbf{E_3}:$ | $\Delta t'_{2-3} = \Delta t'_{1-2}$ | In $\Sigma'$ läuft das Signal genauso lange hin wie zurück. |
| | $= t'_2 - t'_1 = 2{,}5\,\mathrm{h} + 1{,}5\,\mathrm{h} = 4\,\mathrm{h}$ | |
| | $t_3 = \dfrac{t'_3}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 4\,\mathrm{h}\cdot\dfrac{5}{4} = 5\,\mathrm{h}$ | Zeitdilatation |
| | $x_3 = v\cdot_3 = \dfrac{3}{5}c\cdot 5\,\mathrm{h} = 3\,\mathrm{Lh}$ | |

Nun bekommt die Raumstation das rechtwinklige Koordinatensystem.




Die blauen gestrichelten Linien zeigen das Kennzeichnen der Zeit für $E_2$ in $\Sigma'$ sowie das anschließende bequeme Ablesen an der $t$-Achse.

Nun bekommt $\Sigma'$ (das Raumschiff) das rechtwinklige Koordinatensystem.



# 8. Zwillingsparadoxon

Die folgende Aufgabe ging unter dem Namen *Zwillingsparadoxon* in die Geschichte der Relativitätstheorie ein.

**Aufgabe 8.1: Zwillingsparadoxon**

Auf der Erde (System $\Sigma$) mögen zwei Zwillinge leben. Sie seine 20 Jahre alt.

Ein Zwilling erhält die Aufgabe, mit einer Rakete von der Erde geradlinig gleichförmig mit der Relativgeschwindigkeit $v = \frac{3}{5}c$ wegzufliegen, nach 20 Jahren (Raumschiffzeit) umzukehren und mit der gleichen Relativgeschwindigkeit zurückzukommen.

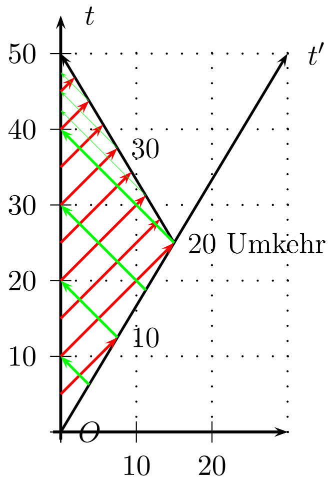
Der zweite Zwilling verbleibt auf der Erde.

Außerdem vereinbaren sie, dass jeder alle 5 Jahre eine Grußbotschaft schickt.

Veranschauliche die Geschehnisse in zwei Minkowski-Diagrammen, einmal bekommt die Erde das rechtwinklige System, einmal der Raumfahrer.

Fasse die Ergebnisse zusammen.

**Lösung 8.1**




Der Flieger sendet auf seinem Hinflug 4 Signale, also sind bei ihm 20 Jahre vergangen.
Er sendet auf dem Rückflug 4 Signale, also sind insgesamt 40 Jahre im Raumschiff vergangen.

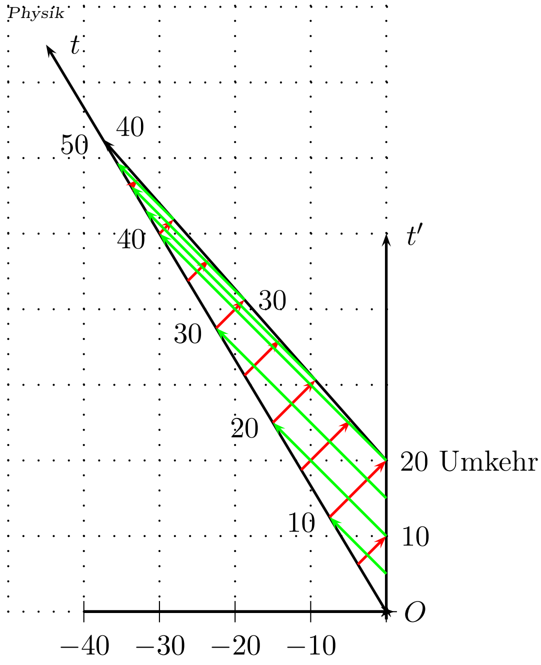
Er empfängt auf dem Hinflug 2 Signale, also sind auf der Erde 10 Jahre vergangen.
Auf dem Rückflug empfängt er 8 Signale (also 40 Jahre), insgesamt merkt er, auf der Erde sind 50 Jahre vergangen.

Der Erdling empfängt im 10-Jahres-Abstand erst 4 Signale, dann nochmal 4 Signale im 2,5-Jahres-Abstand und merkt, im Raumschiff sind 40 Jahre und auf der Erde 50 Jahre vergangen.

Das ist paradox, weil scheinbar das Relativitätsprinzip verletzt wird.

Die Lösung liegt in der Umkehr. Der Raumfahrer wechselt das Bezugssystem. Man sieht das am Knick in seiner Weltlinie, er selber merkt es durch die plötzliche Beschleunigung während der Umkehr.

Auch wenn wir die $t'$-Achse senkrecht zeichnen, ergibt sich dasselbe Ergebnis.




Den Effekt, dass die Signale bei Entfernung verzögert und bei Annäherung verdichtet ankommen, kennen wir als Dopplereffekt.

# 9. Relativistischer Dopplereffekt

Beim akustischen Dopplereffekt spielt die Existenz des Ausbreitungsmediums eine Rolle, sodass zwischen der Bewegung von Sender und Empfänger unterschieden werden muss. Bei elektromagnetischen Wellen braucht man das nicht.

Unsere Sender und Empfänger haben jeweils eine Lichtuhr.

Zur Herleitung der Formel betrachten wir mehrere Fälle:

## a) Sender und Empfänger in Ruhe

Der Sender sendet Signale im zeitlichen Abstand $T_S$.

Der Empfänger empfängt im zeitlichen Abstand $T_E = T_S$.

## b) Sender in Bewegung (ohne Zeitdilatation)

Der Sender bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v$ auf den Empfänger zu.

Zwischen zwei Signalen hat sich der Sender um die Strecke $v \cdot T_S$ bewegt. Diese Wegstück muss das nächste Signal nicht mehr zurücklegen und benötigt deshalb die Zeit $\frac{vT_S}{c}$ weniger.

Also folgt nun $T_E = T_S - \frac{vT_S}{c} = T_S\left(1 - \frac{v}{c}\right)$ bei Annäherung.

Für die Entfernung des Senders vom Empfänger folgt analog $T_E = T_S\left(1 + \frac{v}{c}\right)$.

## c) Sender in Bewegung (mit Zeitdilatation)

Da wir wissen wollen, in welchem Abstand die Signale beim Empfänger ankommen, begeben wir uns in das Empfängersystem. Also geht die einzelne Senderuhr wegen Zeitdilatation nach und die Signale werden aus Empfängersicht verzögert im Abstand $T_S \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ausgesandt.

Dies senden wir oben statt dem dortigen $T_S$ ein. Wir betrachten wieder erst die Annäherung.

$$T_E = T_S \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) = T_S \sqrt{\frac{(c-v)^2}{c^2-v^2}} = T_S \sqrt{\frac{(c-v)^2}{(c-v)(c+v)}} = T_S \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

. Für die Entfernung folgt analog

$$T_E = T_S \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Mit $T = \frac{\lambda}{c}$ folgt

$$\lambda_E = \lambda_S \sqrt{\frac{c \mp v}{c \pm v}}$$

**Aufgabe 9.2: Rotverschiebung**

Bei der Galaxi *Corona Borealis* stellt man fest, dass die 394 nm-Spektrallinie unter der Farbwellenlänge 423 nm zu sehen ist. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Galaxie und in welche Richtung?

**Aufgabe 9.3: Ampel**

Mit welcher Geschwindigkeit muss man auf eine rote Ampel ($\lambda_r = 700\,\mathrm{nm}$) zufahren, damit man das Licht als grün ($\lambda_g = 500\,\mathrm{nm}$) ansieht?

**Lösung 9.2**

$$v = 21\,300\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

# 10. Lorentz-Transformatition

Zwei Bezugssysteme $\Sigma$ und $\Sigma'$ bewegen sich mit der Relativgeschwindigkeit $v$ zueinander.

Sind Orts- und Zeitkoordinaten eines Ereignisses in einem Bezugssystem gegeben, können die Koordinaten in dem anderen Bezugssystem errechnet werden.

## 10.1. Bedingungen

- Relativitätsprinzip
- $c$ unabhängig vom Bezugssystem
- die Galilei-Transformation sollte als Grenz- oder Spezialfall (für $v \ll c$) enthalten sein

## 10.2. Herleitung der Ortskoordinatentransformation

Der Zusammenhang zwischen Koordinaten und Relativgeschwindigkeit ergibt sich aus der Galilei-Transformation.

Ein Objekt, dass im Koordinatenursprung mit $v$ relativ in $\Sigma$ startet, hat in $\Sigma'$ die Koordinate $x' = 0$.

In $\Sigma$ gilt dann: $x' = x - vt = 0 \qquad \longrightarrow \qquad v = \frac{x}{t}$

Ein Objekt mit $x = 0$ in $\Sigma$ bewegt sich in $\Sigma'$ in die entgegengesetzte Richtung.

In $\Sigma'$ gilt dann: $x = x' + vt' = 0 \qquad \longrightarrow \qquad -v = \frac{x'}{t'}$

Nun probieren wir einen Korrekturfaktor $k$ für die relativistische Transformation.

(1) $\qquad x' = k(x - vt) \qquad x = k(x' + vt')$

Um $c = \text{const}$ zu berücksichtigen, betrachten wir je ein Phonton in $x$- bzw. $x'$-Richtung.

$x' = ct' \qquad x = ct$

in (1) $\qquad ct' = k(ct - vt) = kt(c - v) \qquad ct = k(ct' - vt') = kt'(c + v)$

Diese beiden Gleichungen multiplizieren wir.

$c^2tt' = k^2tt'(c^2 - v^2)$ für $t = 0$ bzw. $t' = 0$ trivial

sonst $\qquad k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ wird für $v \ll c$ rund 1 Galilei-Trafo

## 10.3. Transformation der Zeit

$$x = k(x' + vt')$$

$$t' = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{k} - x'\right) \qquad \text{mit } x' = k(x - vt) \text{ folgt}$$

$$t' = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{k} - k(x - vt)\right) = \frac{1}{vk}x - \frac{k}{v}x + kt = k\left(t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$\text{Mit } 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{v^2}{c^2} \text{ folgt}$$

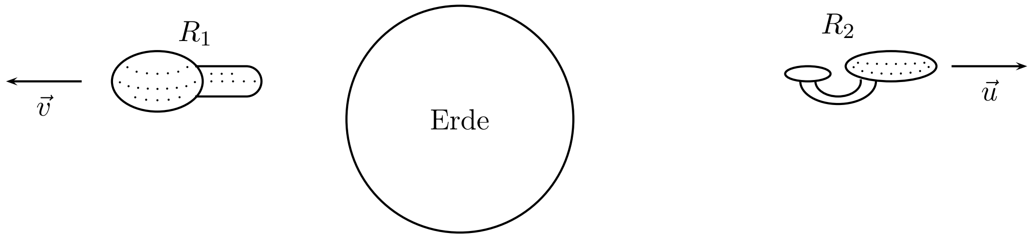
$$t' = k\left(t - \frac{x}{v}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

# 11. Geschwindigkeitsaddition

Mit Hilfe der Lorentz-Transformation lässt sich auch schnell das Problem der relativistischen Geschwindigkeitsaddition lösen.

**Aufgabe 11.1: Geschwindigkeitsaddition**

Zwei Raumschiffe $R_1$ und $R_2$ bewegen sich in entgegengesetzter Richtung von der Erde weg.




Die Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und $\vec{u}$ gelten im System *Erde*.
Seien $v = -0.8c$ und $u = 0,7c$. Die Vorzeichen berücksichtigen nun die unterschiedlichen Richtungen.

Wie groß ist die Geschwindigkeit $u'$ von $R_2$ aus Sicht von $R_1$?

**Lösung 11.1**

Nun bewegt sich sich die Erde mit $v = 0,8c$ von $R_1$ weg und im Sytem *Erde* das Raumschiff $R_2$ mit $u = 0,7c$. Beide Geschwindigkeiten haben dieselbe Richtung und sind positiv.
Klassisch würde gelten $u' = v + u = 0.8c + 0.7c = 1,5c$ im Widerspruch zu c als Grenzgeschwindigkeit.

Nun rechnen wir relativistisch.

$$
\begin{aligned}
u' &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} && \Big| \text{ Lorentz-Trafo} \\
&= \frac{\Delta x + v\,\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\Delta t + \frac{v}{c^2}\Delta x} && \Big| \text{ Kürzen und erweitern mit } \frac{1}{\Delta t} \\
&= \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} && \Big| \ \frac{\Delta x}{\Delta t} = u \\
&= \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \\
&= \frac{0.7c + 0,8c}{1 + \frac{0,7c \cdot 0,8c}{c^2}} = \frac{1,5c}{1+0,56} = 0,96c
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Formel lautet also

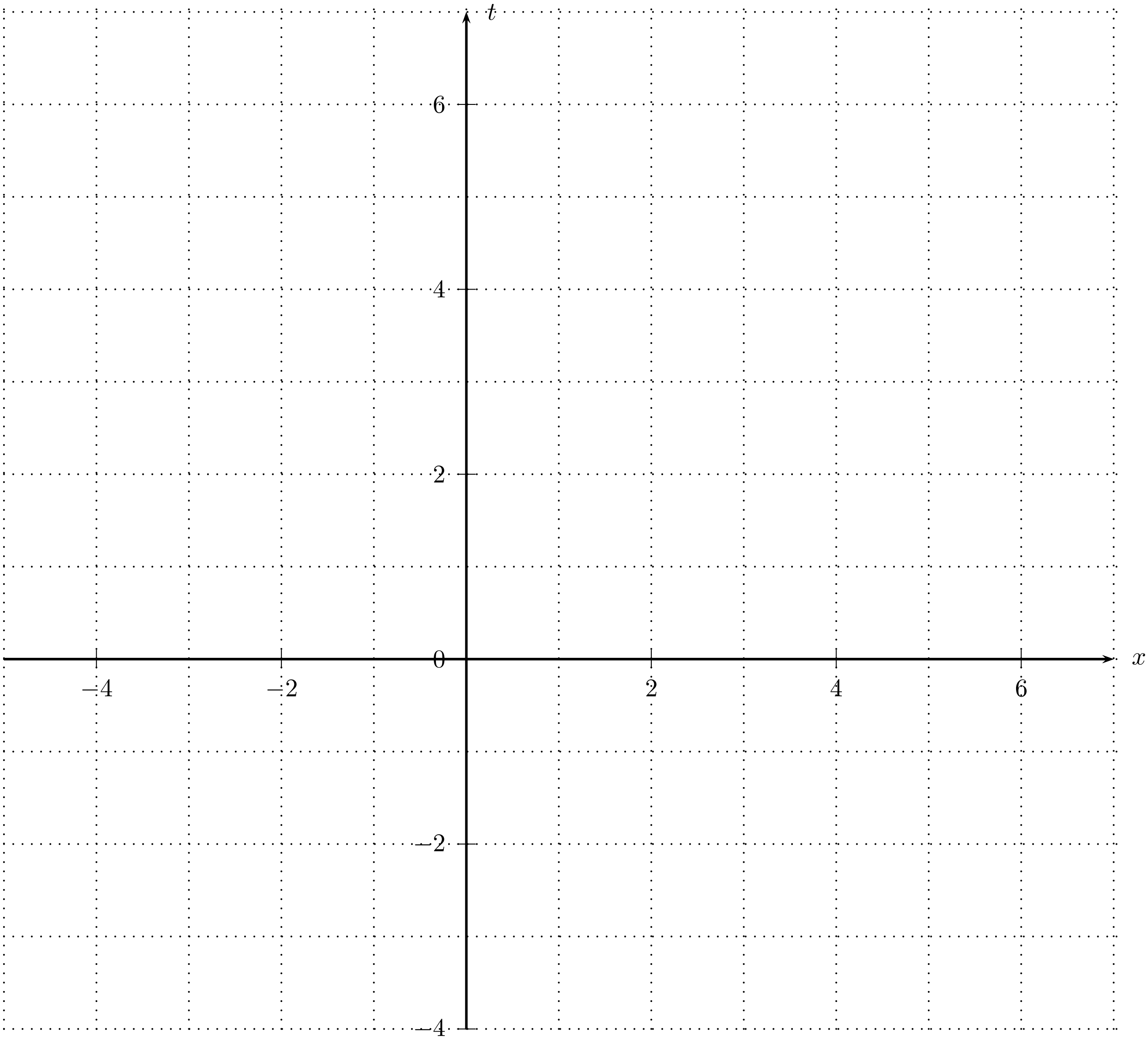
$$u' = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \tag{11.1}$$

unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Geschwindigkeiten.

**Aufgabe 11.2: Geschwindigkeitsaddition**

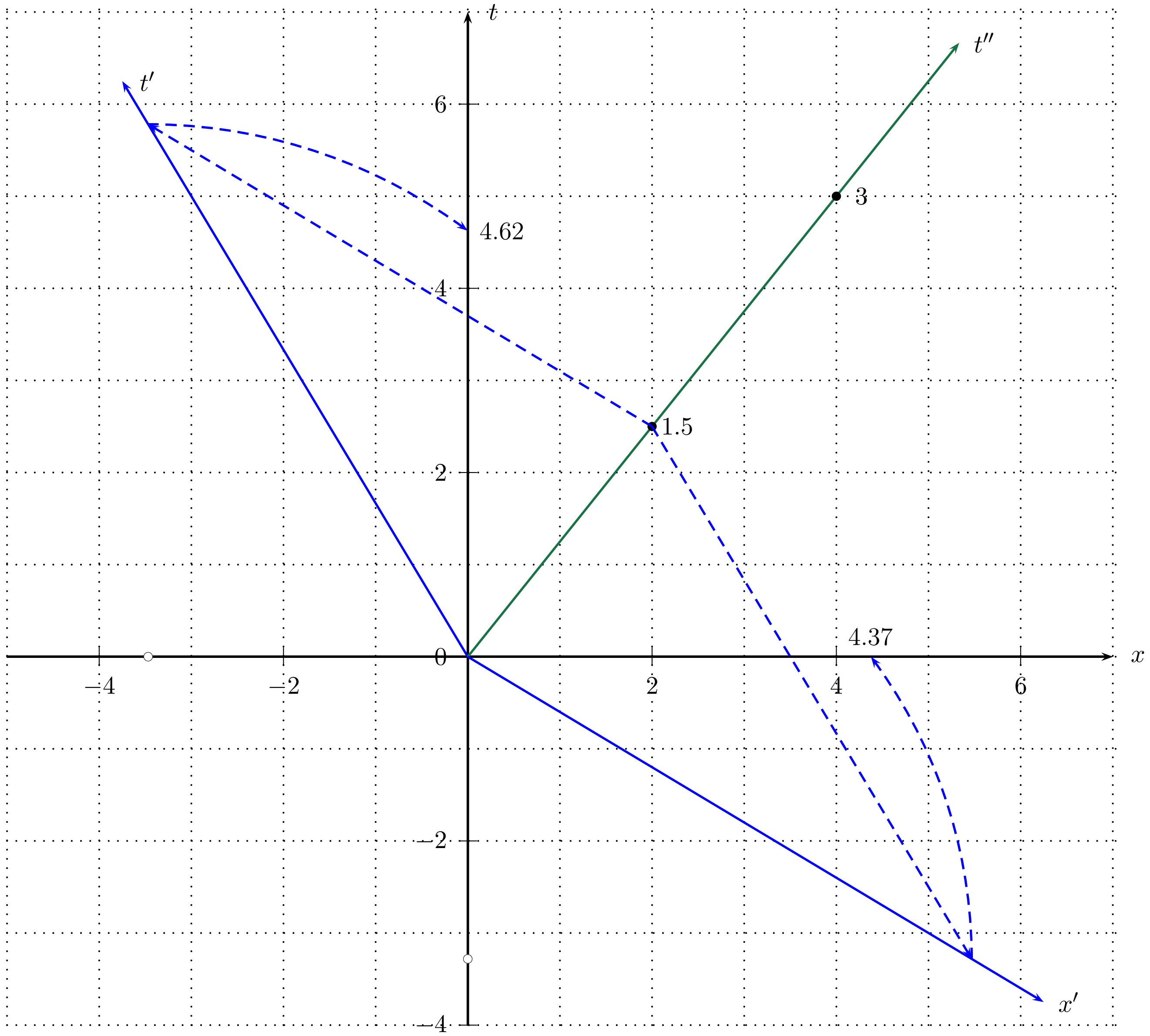
Wir nehmen dasselbe Szenario wie oben. Für das bessere Zeichnen bewegt sich Raumschiff $R_2$ mit $u = 0,6c$ von der Erde weg, $R_1$ wie gehabt mit $v = 0,8c$.

1. Zeichne diesen Vorgang in ein Minkowski-Diagramm mit der Erde als rechtwinkliges System.
2. Lies geeignete Koordinaten von $R_2$ im System von $R_1$ ab und bestimme so durch Ablesen die Geschwindigkeit $u'$ von $R_2$.
3. Vergleiche mit dem berechneten Ergebnis.
4. Zeichne nun das Minkowski-Diagramm mit $R_1$ als rechtwinkligem System.



**Lösung 11.1**

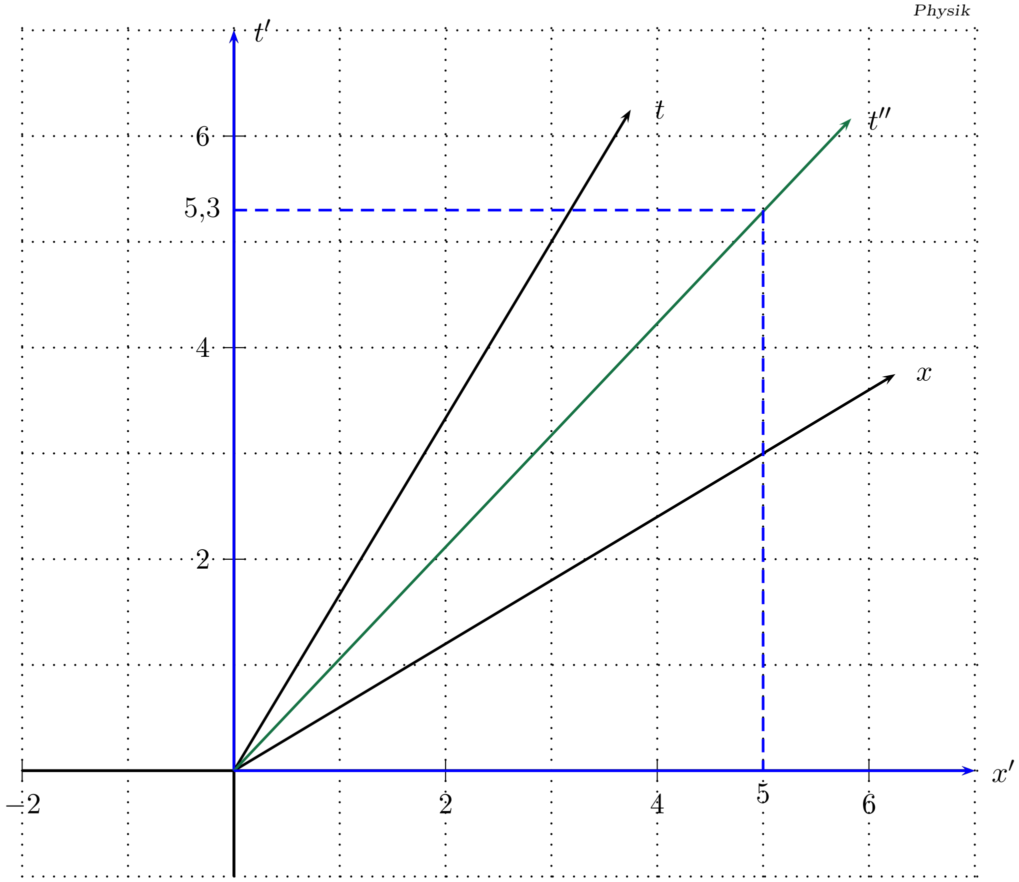
1. .




2. $\dfrac{4.37}{4.62} = 0,946$

3. $u' = \dfrac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \dfrac{0,6+0,8}{1+\frac{0,8*0,6c^2}{c^2}} = 0,946c$

4. .




$$\frac{5}{5.29} = 0,945$$

# 12. Hyperlichtsignale

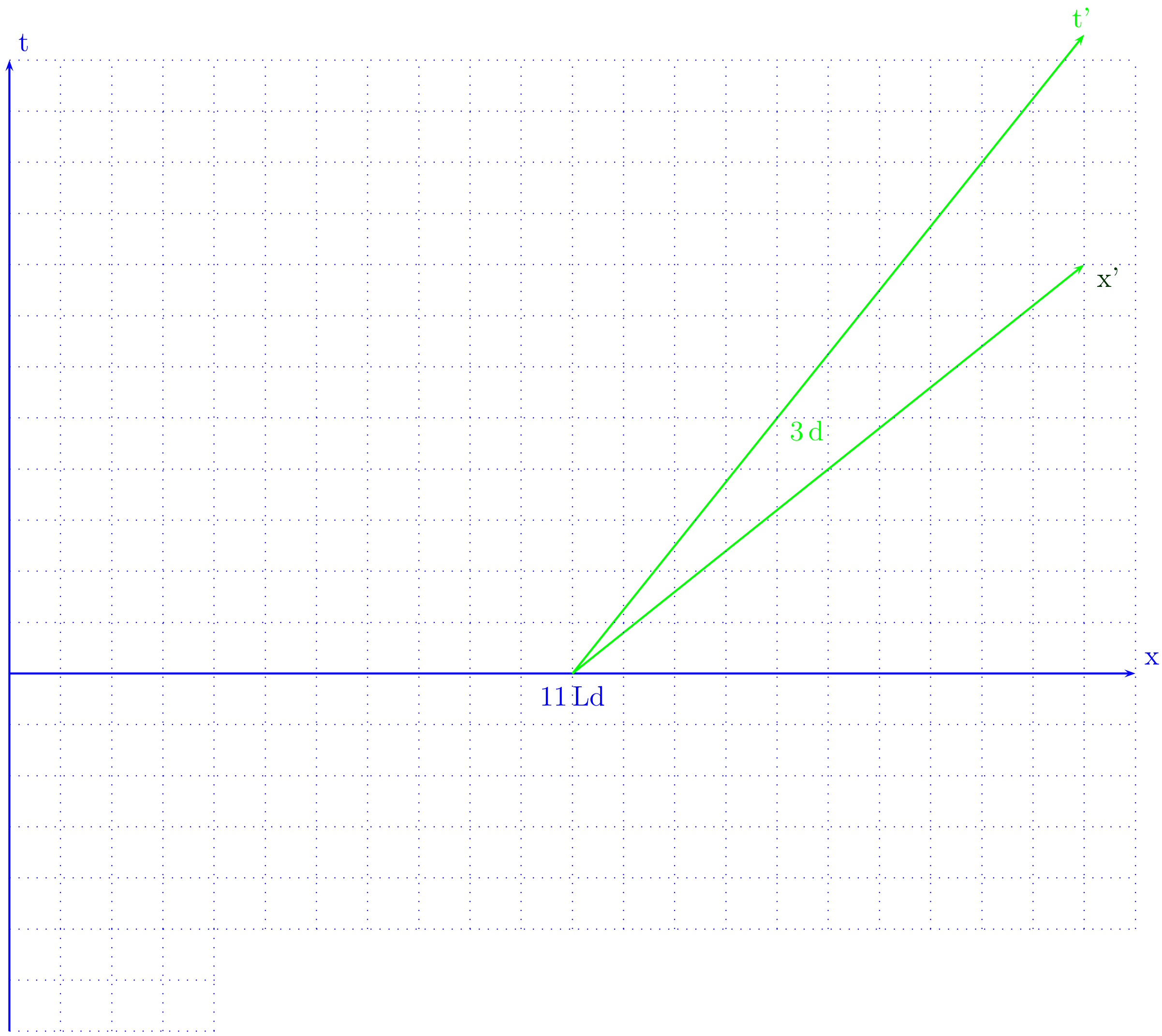
Nun wollen wir in einem Gedankenexperiment überprüfen, was möglich wäre, wenn man Signal mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen könnte.

**Aufgabe 12.1: Hyperlichtsignale**

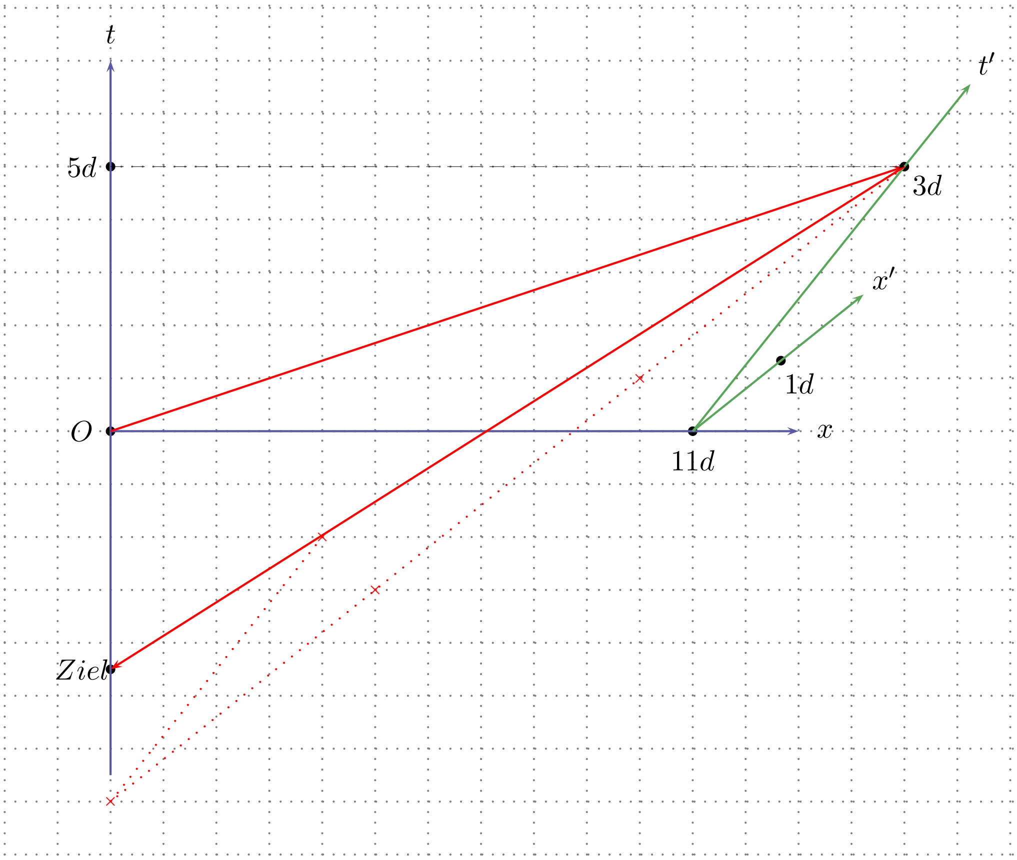
Auch zukünftig wird es immer wieder Betrugsversuche geben, um das große Geld zu machen. Zwei technisch versierte Gauner haben sich dazu folgenden Trick ausgedacht:

Gauner A sitzt im System $\Sigma$ und hört am Samstag die Lottozahlen im Fernsehen. Er schickt sofort ein $3c-$Hypersignal zu Gauner B, der sich am Samstag 11 Lichttage entfernt befindet und mit $\frac{4}{5}c$ weg fliegt. Nach Empfang des Signals mit den Lottozahlen schickt er das Signal sofort wieder mit $3c$ zurück.

Zeichne das Geschehen in ein Minkowskidiagramm und erläutere die zeitlichen Abläufe.

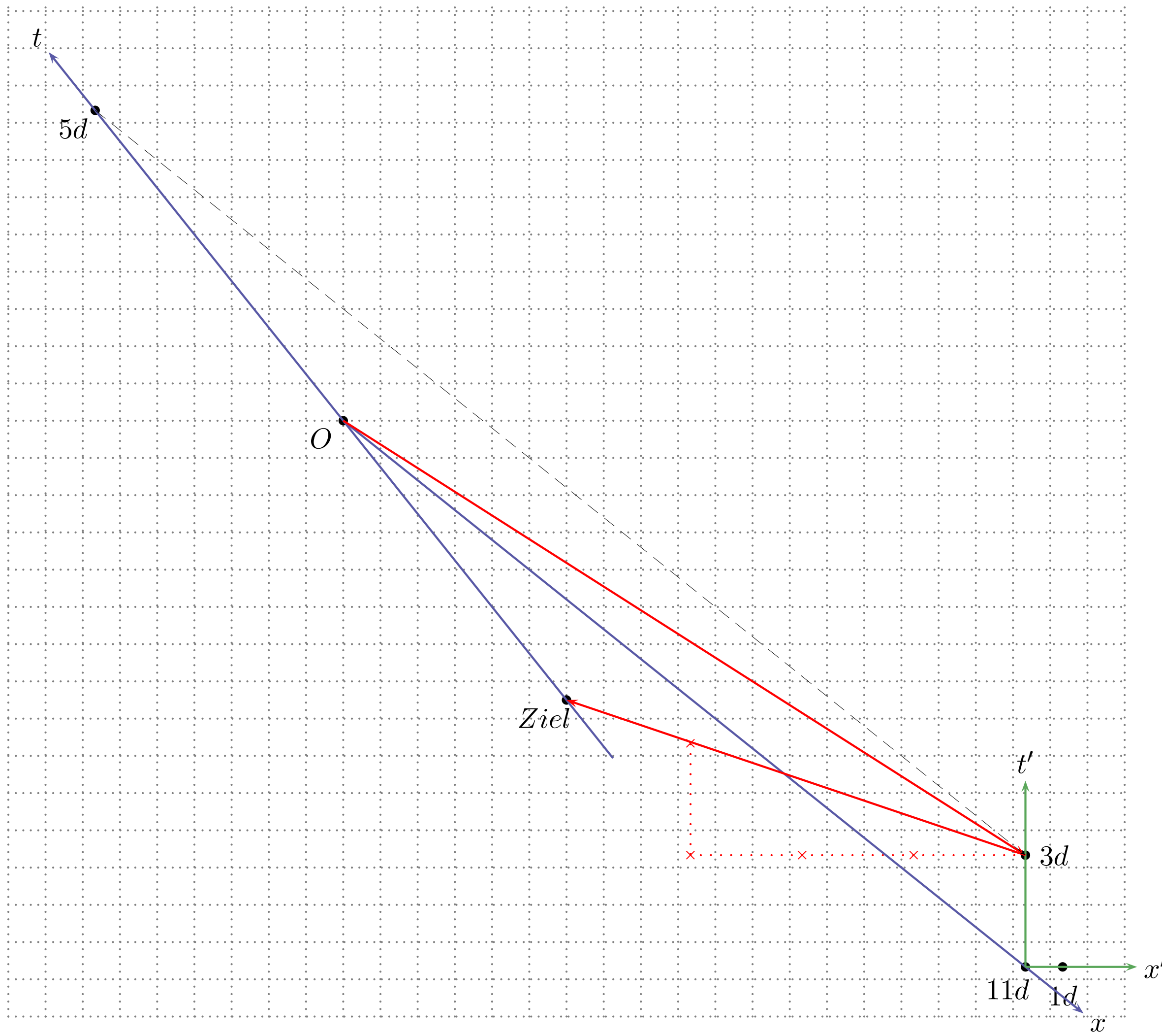


**Lösung 12.1**



## Erläuterungen

- Das Hin-Signalgeht 3 Einheiten parallel zur $x$-Achse nachrechts und eine Einheit parallel zur $t$-Achse nach oben.
- Ein 3c-Signal geht 3 Einheiten parallel zur $x'$-Achse nach links und eine Einheit parallel zur $t'$-Achse nach oben.
- Das Hin-Signal kommt as Sicht von $\Sigma$ später an, als es los ging, eigentlich ok.
- Das Rücksignal kommt aus Sicht von $\Sigma'$ später an als es los ging, auch ok.
- Aus Sicht von $\Sigma$ kommt das Rücksignal aber an, bevor das Hin-Signal startete. Gauner A kann also den Tippschein mit den richtigen Zahlen ausfüllen.
- Das Kausalitätsprinzip wäre nicht erfüllt!



# 13. Relativistische Dynamik

## 13.1. Relativistische Massenzunahme

### Klassische Rechnung

1. Bei konstanter Beschleunigung steigt die Geschwindigkeit linear

Beispiel: $a = g \rightarrow$ nach $t = \frac{c}{g} = \frac{3 \cdot 10^8}{10}\,\mathrm{s} = 347,2\,\mathrm{a}$ wird die Lichtgeschwindigkeit erreicht.

Beispiel: Beschleuniger schaffen $20,5\,\mathrm{GeV} = 3,3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J} = \frac{m}{2}v^2$ für Elektronen.

also $v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}}{9,1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}}} = 2.8388 \cdot 10^{18}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 284\,\mathrm{c}$

### Betrachtung über den Impuls $\mathbf{p} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}$

- Eine Kugel mit $m = 1\,\mathrm{kg}$ bewege sich mit $\Delta y = 100\,\mathrm{m}$ in $\Delta t = 4\,\mathrm{s}$ in $y$-Richtung.
- Sie hat also eine Geschwindigkeit $u_y = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und einen Impuls $p_y = 25\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$.
- Sie dringt eine bestimmte Strecke $\Delta s_y$ in eine Mauer ein.

Nun betrachten wir das Ganze aus dem System $\Sigma'$, welches sich mit $v = \frac{3}{5}\mathrm{c}$ in $x$-Richtung bewegt.

- Das Loch hat die gleiche Tiefe $\Delta s_y$.
- Also gilt $p_y = p'_y = m'u'_y$.
- In $\Sigma'$ ist $\Delta t$ die einzelne Uhr, also gilt $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 5\,\mathrm{s}$
- So ist $u'_y = \frac{100}{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- Wegen $p_y = p'_y$ folgt $m' = \frac{p'_y}{u'_y} = \frac{25}{20}\,\mathrm{kg} = 1,25\,\mathrm{kg} > m$

### Herleitung

Aus der Gleichheit der Impulse folgt:

$$\begin{aligned}
p'_y &= p_y \\
m'\frac{\Delta y'}{\Delta t'} &= m\frac{\Delta y}{\Delta t} \\
m' &= m\frac{\Delta y \Delta t}{\Delta y' \Delta t} \\
&= m \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

dynamische Masse: $m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ dynamischer Impuls $p' = m'v = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

# 14. Energie-Masse-Äquivalenz

Wir gehen aus von der allgemeinen Definition der Arbeit bzw. kinetischen Energie:

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= \int_0^x F\,\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mu)\,\mathrm{d}x && \Big|\ \text{Produktregel} \\
&= \int_0^x (\dot{u}m + \dot{m}u)\,\mathrm{d}x && \Big|\ \text{Mit } \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \text{ folgt} \\
E_{\text{kin}} &= \int_0^p \left(um\,\mathrm{d}u + u^2\,\mathrm{d}m\right)
\end{aligned}$$

Dieser Klammerausdruck lässt sich mit Hilfe der relativistischen Masse anders ausdrücken.

$$\begin{aligned}
m(t) &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\
m^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) &= m_0^2 \\
m(t)^2c^2 - m(t)^2u(t)^2 &= m_0^2c^2 && \Big|\ \cdot\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \\
2mc^2\dot{m} - 2mu^2\dot{m} - 2um^2\dot{u} &= 0 && \Big|\ : 2m\ \cdot \mathrm{d}t \\
c^2\,\mathrm{d}m - u^2\,\mathrm{d}m - um\,\mathrm{d}u &= 0 \\
um\,\mathrm{d}u + u^2\,\mathrm{d}m &= c^2\,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

Für die kinetische Energie folgt daraus:

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} = \int_{m_0}^{m} c^2\,\mathrm{d}m = c^2\int_{m_0}^{m}\mathrm{d}m &= mc^2 - m_0c^2 \\
&= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right)
\end{aligned}$$

Für kleinere Geschwindigkeiten folgt mittels Taylor-Zerlegung nach $\frac{u}{c}$:

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= m_0c^2\left(\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \\
&= m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{u}{c}\right)^4 + \cdots - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}m_0u^2
\end{aligned}$$

# A. Arbeitsplan Erweiterungsgrundkurs Relativitätstheorie

| Woche | Inhalte | Versuche, Arbeitsmittel, Literatur, ... |
|---|---|---|
| | Einführung in die Relativitätstheorie<br>Problemstellung | |
| | Galilei-Transformation | |
| | Relativität von $v$, $p$ und $E_{\text{kin}}$ | |
| | Grenzgeschwindigkeit $c$ | |
| | Versuch von Belozzi und Kaufmann | Lit.: Ehrenwirth bzw. Oldenburg LK 2. Sem. S.183 |
| | Akustischer Dopplereffekt | |
| | Schalllaufzeiten bei Gegen- und Seitenwind | Lit.: Ehrenwirth bzw. Oldenburg LK 2. Sem. S.188 |
| | Michelson-Morley-Versuch | Präs.: Rela-Michelson-Exp.pdf |
| | Schlussfolgerungen, Deutungsmöglichkeiten | |
| | Versuche, die Ätherhypothese zu halten | Präs.: Auswert-Michelson-Exp.pdf |
| | Folgerungen aus der Konstanz von $c$ | |
| | Relativität von Zeit und Gleichzeitigkeit | |
| | Lichtuhr | |
| | Vergleich einer einzelnen Uhr mit zwei sychronisierten Uhren | |
| | Uhrensynchronisation | |
| | Zeitdilatation | |
| | Längenmessung | |
| | Längenkontraktion | |
| | Minkowski-Diagramm<br>Weltlinien, Weltlinie einer Uhr<br>Lage der $t'$-Achse und der $x'$-Achse | |
| | Konstruktion der Metrik | AB.: Min-Massstab.pdf |
| | Übungen zum Minkowski-Diagramm | |
| | Zwillingsparadoxon | |
| | Dopplereffekt | |
| | Lorentz-Transformation | |
| | Mesonenexperiment | |
| | Relativistische Geschwindigkeitsaddition | |
| | Hyperlichtsignale | AB: Hyperlicht.pdf |
| | Relativistische Massenzunahme | |
| | Relativistischer Impuls | |
| | Relativistische Energie | |
| | Äquivalenz Masse-Energie $E = mc^2$ | |
| | Uhren im Gravitationsfeld | |
| | Lorentz-Kraft | |
| | Ausblick auf Allgemeine RT | |