Erweiterungskurs HHO G-6 (1. Semester, 45 Stunden)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
15	**Teilweise Wiederholung aus Kl. 10: Reelle Zahlenfolgen,Grenzwerte, Häufungswerte**	
	• Reelle Zahlenfolgen als Funktionen von den natürlichen in die reellen Zahlen	Hier ist ggf. an den Abschnitt *Folgen und Grenzwerte in elementarer Form* der Klasse 10 anzuknüpfen.
	• Veranschaulichung von Folgen auf der Zahlengeraden	
	• Rekursive und explizite Darstellung von Zahlenfolgen	U.a. für geometrische Folgen und Reihen
	• Methode der vollständigen Induktion	U.a. Eigenschaften für Folgen und Reihen aus ihrer rekursiven Darstellung induktiv beweisen (auch verschiedene Summenformeln)
	• Summenformel für die endliche geometrische Reihe	
	• Konvergenz einer Folge, Grenzwert, Nachweise dafür, dass eine Zahl Grenzwert einer gegebenen Folge ist mittels der Grenzwertdefinition	Verwendung von sowohl äquivalenten Umformungen als auch Abschätzungen für den Grenzwertnachweis
	• Häufungswerte, konvergente Teilfolgen, Beschränktheit einer konvergenten Folge, Satz von Bolzano-Weierstrass für Folgen	Es sollten logische Zusammenhänge zwischen den Begriffen Grenzwert und Häufungswert diskutiert und ein Ausblick auf bestimmt und unbestimmt divergente Folgen gegeben werden.
	• Konvergente und divergente geometrische Reihen	Aus Zeitgründen sollte man sich auf instruktive Beispiele beschränken.
	• Grenzwertsätze für konvergente Folgen (Summe, Differenz, Produkt, Quotient)	Der Beweis eines Grenzwertsatzes genügt. Anwenden der Sätze für den Konvergenznachweis bzw. die Ermittlung von Grenzwerten für Folgen. Als Beispiele für konvergente bzw. divergente Folgen sollten auch Partialsummenfolgen herangezogen werden.
	• Vergleichssatz (Folgen mit nur positiven oder negativen Gliedern, Folgerung für den Grenzwert)	
	• Einschachtelungssatz für konvergente Folgen	
15	**Monotone Zahlenfolgen (eventuell nach Stetigkeit behandeln)**	
	• Charakterisierung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ durch das Intervallschachtelungsprinzip (Jede Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ eine innere Zahl (Schachtelungselement))	In diesem Zusammenhang sollte wiederholend (Kl. 9) auf den Vergleich von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ eingegangen werden (Dichtheit, Abzählbarkeit, Nichtvollständigkeit von $\mathbb{Q}$; Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$).
	• Folgerung der Existenz des Supremums bzw. Infimums einer nach oben bzw. unten beschränkten Menge reller Zahlen	Der exakte Beweis muss nicht erbracht werden.
	• Konvergenzkriterium für monotone Folgen	Beispiele
	• Bernoullische Ungleichung	Beweis mittels vollständiger Induktion (Wiederholung des Verfahrens)
	• Der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	Beweis z.B. durch Rückgriff auf das Intervallschachtelungsprinzip

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
15	**Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit**	
	• Grenzwertuntersuchungen (insbesondere an Definitionslücken)	Funktionsterme wie $\frac{x^2-1}{x+1}$, $\frac{\lvert x\rvert}{x}$, $\frac{\sin(x)}{x}$, $\frac{\cos(x)-1}{x}$, $x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
	• Übertragung der Grenzwertsätze für Folgen auf solche für Funktionen	
	• Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle (Folgendefinition, ε-δ-Charakterisierung)	Für die Äquivalenz der Folgendefinition mit der ε-δ-Charakterisierung (eventuell mit Beweis) sollte auch anschauliches Verständnis erreicht werden.
	• Stetigkeit ausgewählter Funktionen auf ihrem Definitionsbereich	z.B. bei Winkelfunktionen
	• Stetige Fortsetzbarkeit	Es sind auch Beispiele für nicht stetige bzw. nicht stetig fortsetzbare Funktionen zu behandeln.
	• Verknüpfung stetiger Funktionen (einschließlich Verkettung)	Sätze eventuell mit Beweisen
	• Stetigkeit der Umkehrfunktion	Sätze eventuell mit Beweisen
	• Stetige Differenzierbarkeit	
	• Nullstellensatz, Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum/Minimum	Begründung, dass jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.
20	**Vektorräume**	
	• Struktur eines Vektorraumes	Vektorraumstruktur z.B. aus der Lösungsmenge einer linearen Gleichung in 3 Variablen. Neben dem exemplarischen Einstiegsbeispiel eines Vektorraumes sollten in der Folge weitere Beispiele, z.B. Funktionenräume behandelt werden. Auf geometrische Interpretationen sollte an dieser Stelle noch bewußt verzichtet werden, um den Begriff des Vektors bei den Schülern allgemeiner zu verankern. Es empfiehlt sich, in Schreibweisen Zeilen und Spalten sauber zu unterscheiden.
	• Linearkombination, Erzeugendensystem, Lineare Hülle	
	• Basen als minimale Erzeugendensysteme, lineare Unabhängigkeit	
	• Eindeutigkeit der Darstellung (Spalten) bzgl. fester Basis (Basiswechsel - kanonische Basis)	Die entsprechenden Beweise sind zu erbringen.
	• Unterräume, Dimension (Austauschsatz, Basisergänzungssatz)	Das Unterraumkriterium ist zu erarbeiten und anzuwenden.

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
10	**Lineare Gleichungssysteme (LGS)**	
	• Lösungsmengenbestimmung über das Gauß-Verfahren im homogenen und inhomogenen Fall (Zusammenhang: Lösungsmenge eines inhomogenen und des zugehörigen homogenen Systems) • Aus Beispielen: Propädeutische Fassung des Dimensionssatzes (Rang eines LGS als maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren; Dimension der Lösungsmenge als Anzahl der frei wählbaren Variablen) • Matrix-Vektor-Schreibweise eines LGS, Rang einer Matrix, Gleichheit von Spalten- und Zeilenrang • Lösbarkeitskriterien über den Rangbegriff • Satz über die Anzahl der frei wählbaren Parameter • Lösungsraum des homogenen LGS als Vektorraum mit Dimensionsbegriff	Die wesentlich verschiedenen Fälle der Lösungsmengen sollen sich aus geeigneten Beispielen ergeben. Der Dimensionssatz wird im speziellen Leistungskurs in Kl. 12 (im Zusammenhang mit linearen Abbildungen wieder aufgegriffen und vertieft. Der Beweis wird nicht erbracht.
5	**Weiterführung Zahlenfolgen**	
	• Konvergenzkriterium von Cauchy für Zahlenfolgen • Banachscher Fixpunktsatz und Anwendungen (NEWTON-Verfahren als Spezialfall)	
10	**Komplexe Zahlen**	
	• Multiplikation, Division in $\mathbb{C}$, Inversenbildung, konjugiert komplexe Zahl • Körpereigenschaften der komplexen Zahlen • trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen (Polarkoordinaten), Interpretation der Multiplikation (und Division)in der Gaußschen Zahlenebene • Nachweis, dass der Körper der komplexen Zahen nicht angeordnet werden kann • Potenzen und Wurzeln (Satz von Moivre) • Lösung quadratischer Gleichungen mit komplexen Koeffizienten • Faktorisierung von Polynomen mit reellen Koeffizienten über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ (Fundamentalsatz der Algebra, Primpolynome)	

MA-1+ Analysis I HHO G-6 (75 Stunden)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
15	**Differenzierbarkeit, Ableitung**	
	• Ableitung einer Funktion an einer Stelle als Grenzwert von Differenzenquotientenfolgen, Vergleich: durchschnittliche Änderungsrate, lokale Änderungsrate	Die Kenntnisse aus Klasse 10 sind zu vertiefen. Die drei Aspekte der 1. Ableitung sollten anschaulich herausgearbeitet werden: 1. Tangentensteigung an der entsprechenden Stelle 2. lokale Änderungsrate (z. B. Momentangeschwindigkeit) 3. lineare Approximierbarkeit der Funktion an der entsprechenden Stelle
	• Begriff der Ableitungsfunktion	An einer Stelle stetige, jedoch nicht differenzierbare Funktionen sollten angesprochen werden. Zu vorgegebenen Funktionen die Ableitungsfunktion ermitteln und graphisch darstellen. Vergleich der Graphen von f, f', f''
	• Ableitungsregeln: $(c)'=0\,;(x)'=1\,;$ $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}, n\in N\setminus(0\,;1)$ $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$	Die Regeln sollten teilweise aus Klasse 10 bekannt sein.
	• Ableitung trigonometrischer Funktionen	Die Ableitung von Kosinus, Tangens und Kotangens kann auf die Ableitung des Sinus gestützt werden.
	• Produkt-, Quotienten- und Kettenregel	
	• Ableitung der Umkehrfunktion	Wiederholung zu Umkehrfunktionen aus Klasse 10, graphische Darstellung von f und f^{-1}
	• Ableitung von $x^r, r\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$	
10	**Sätze über differenzierbare Funktionen**	
	• Satz von Rolle	Auf die benötigten Sätze über stetige Funktionen muss verwiesen werden (Erweiterungskurs).
	• Mittelwertsatz der Differentialrechnung	
	• Globaler Monotoniesatz	
	• Zusammenhang: Stetigkeit - Differenzierbarkeit einer Funktion	
20	**Funktionsuntersuchungen**	
	• Relative Extrema einer Funktion, Hoch- und Tiefpunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten und Wendepunkte eines Funktionsgraphen mit entsprechenden notwendigen und hinreichenden Kriterien (auch Vorzeichenwechselkriterium) bei differenzierbaren Funktionen	Auch hier ist an Inhalte aus Klasse 10 anzuknüpfen. Es sollte verdeutlicht werden, dass diese Begriffsbildungen nicht an die Differenzierbarkeit der entsprechenden Funktionen gebunden sind.
	• Funktionsuntersuchungen mit den bisher behandelten Funktionsklassen, auch Scharen	
	• absolute Extrema einer Funktion auf einer Menge (auch für gebrochen-rationale Funktionen)	

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
	• Extremwert- und Anwendungsaufgaben zu den bisher behandelten Funktionsklassen. (auch für gebrochen-rationale Funktionen)	
10	**Integralrechnung I**	
	• Inhalte von Flächen unter Graphen als Grenzwerte	Flächeninhalte als Grenzwerte von Folgen von Ober- und Untersummen berechnen
	• eine Definition des bestimmten Integrals (Riemann-Integrals) für auf [a;b] definierte und beschränkte Funktionen mittels ausgezeichneter Zerlegungsfolgen	Definition z. B. mittels Ober- und Untersummen oder mittels Riemannscher Zwischensummen
	• Beispiel einer nicht integrierbaren Funktion	
	• Existenz des bestimmten Integrals für auf dem Integrationsintervall monotone bzw. stetige Funktionen	Für den Nachweis der Integrierbarkeit einer über [a;b] stetigen Funktion ist die Aussage des Satzes über die gleichmäßige Stetigkeit erforderlich; dies wird im Erweiterungskurs behandelt.
	• Eigenschaften des bestimmten Integrals: Intervalladditivität, Linearität	
10	**Integralrechnung II**	
	• Mittelwertsatz der Integralrechnung	geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes
	• Integralfunktion, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	
	• Stammfunktion, unbestimmtes Integral	
	• Satz über die Differenz zweier Stammfunktionen zu derselben Funktion	
	• Berechnen einfacher bestimmter Integrale mittels Stammfunktionen	
	• Methode der partiellen Integration	
	• Integration durch Substitution	mögliche Ergänzung: Differentiale
10	**Inner- und außermathematische Anwendungen**	
	• Flächeninhalte, Volumen von Rotationskörpern (Kugel, Paraboloid, Ellipsoid), physikalische Arbeit	

MA-2+ Analysis II und Stochastik I   HHO G-6 (75 Stunden)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
15	**Exponential- und Logarithmusfunktion**	
	• Einführung der *ln*-Funktion über das Integral $\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,\ x \in \mathbb{R}$ • Folgerungen aus der Integraldefinition (einzige Nullstelle, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Monotonie) • Herleitung der Funktionalgleichung der *ln*-Funktion, Ermittlung der Wertemenge • Ermittlung der Basis der *ln*-Funktion mit Hilfe der Zwischeneigenschaft des bestimmten Integrals • Aus den obigen Betrachtungen ergibt sich $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C,\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$ • Einführung der *e*-Funktion als Umkehrfunktion der *ln*-Funktion, Eigenschaften der *e*-Funktion	Äquivalente Zugänge sind hier natürlich möglich. Dieser Weg bietet sich wegen seiner Effektivität an. Es werden alle zentralen Begriffe aus der Analysis angewendet. Die Eigenschaften der *e*-Funktion ergeben sich als Folgerungen aus den entsprechenden Eigenschaften der *ln*-Funktion.
10	**Weiterführung der Differential- und Integralrechnung**	
	• Integration mittels Substitution insbesondere für die *ln*- bzw. *e*-Funktion, Differentiale • Integrale der Form $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\|f(x)\| + C$ • Regeln von de l'Hospital • Funktionsuntersuchungen zur *e*-Funktion und *ln*-Funktion (auch Scharen) • Uneigentliche Integrale	Beweis einer Regel, Mitteilung der anderen Varianten Ortskurven
10	**Taylorreihen**	
	• Satz von Taylor mit Restglied • Darstellung von Funktionen durch Taylorreihen	Mittels Restgliedabschätzung sollten einige Funktionen exemplarisch in eine Tayloreihe entwickelt werden.
	Mögliche Ergänzungen:	Diese Zusatzthemen sollten an geeigneter Stelle eingefügt werden.
	• Integration mittels einfacher Partialbruchzerlegungen • Arcus-Funktionen	Es werden nur reelle Nullstellen des Nennerpolynoms betrachtet. Ableitung mittels Umkehrfunktion, Vervollständigung der zur Verfügung stehenden Grundintegrale.
Std.	**Lerninhalte**	**Anmerkungen**

	• Bogenlänge • Numerische Integrationsmethoden • einfache, gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen	Als Anwendung für die Bogenlänge bietet es sich an, die Krümmung eines Funktionsgraphen in einem Kurvenpunkt zu ermitteln.
15	**Stochastik**	
	• Systematisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bei endlicher Ergebnismenge (Ergebnisse, Ereignisse, Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes) • Modelle (Urnenmodelle, Baumdiagramm, Glücksrad, Galton-Brett, ...), Paradoxa • Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Bayes-Formel, Vierfeldertafel	Aus der Mittelstufe sollten bekannt sein: (Laplace-) Wahrscheinlichkeit, kombinatorische Zählprinzipien; mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramm, Pfadregeln. Daran ist anzuknüpfen; eine gemeinsame Basis sollte geschaffen werden.

MA-3+ Lineare Algebra und Analytische Geometrie HHO G-6 (75 Stunden)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
5	**Vektorraum (Wiederholung aus dem Erweiterungs-kurs)**	
	• Begriff Vektorraum anhand geeigneter Modelle • Linearkombination, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, lineare Hülle, Erzeugendensystem, Basis, Basisaustauschsatz, Dimension, Eindeutigkeit der Darstellung bez. einer Basis • Unterraum, Unterraumkriterium	Auf geometrische Interpretationen sollte an dieser Stelle noch verzichtet werden, um den Begriff des Vektors bei den Schülern allgemeiner zu verankern.
10	**Analytische Geometrie: Affine Geometrie**	
	Der affine (Punkt-)Raum (A^3; Geometrie) mit der zugehörigen Vektorraum der Verschiebungen (V^3) • die 3 Axiome des Zusammenhangs • affines Koordinatensystem und zugehörige (kanonische) Basis des Vektorraumes Geometrische Probleme (im affinen Raum): • Punkte, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ • Untersuchung von Lagebeziehungen	Hier soll exemplarisch die Operation einer Gruppe auf einer Menge (einfach transitive Wirkung), d.h. die Nutzung einer beigeordneten Struktur verdeutlicht werden.
10	**Analytische Geometrie: metrische Geometrie**	
	• Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt: Definitionen, Rechenregeln, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	Beim Skalarprodukt ist der zentrale Aspekt der geometrische Gedanke der Projektion auf eine vorgegebene Richtung.
20	**Geometrische Grundaufgaben**	
	• Abstände, Längen und Winkel; Flächeninhalt eines Dreiecks • Normalenform der Ebene, Hessesche Normalenform; Kugeln • Inzidenzuntersuchungen komplexerer Art mit Geraden, Ebenen und Kugeln, Abstände und Winkel; Tangentialebenen • Volumen eines Spats, einer dreiseitigen Pyramide	Hier ist auch an die variable Herleitung von Ebenengleichungen aus unterschiedlichen bestimmenden Objekten gedacht.
10	**Schwerpunkt nach Wahl**	Die genannten Gebiete sollen nach Bedarf und Wunsch vertieft werden.
10	**Lineare Abbildungen, LGS und Matrizen I** • lineare Abbildungen als strukturverträgliche Abbildung zwischen Vektorräumen	

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
	• $Kern(f)$ als Unterraum des Urbildraumes, Zusammenhang mit der Lösungsmenge eines homogenen LGS, geometrisch im Dreidimensionalen Schnitt dreier Ebenen durch den Ursprung • $Bild(f)$ als Unterraum des Bildraumes • Matrix A_f als basisabhängige Darstellung einer linearen Abbildung mit den Spaltenvektoren als Bilder der Basisvektoren, $Rang(A_f)=dim\,Bild(f)$ • Interpretation eines inhomogenen LGS über $Bild(f)$ (dreidimensional-geometrisch: Schnitt dreier Ebenen, aus dem Ursprung verschoben) • Rangbestimmungen mittels elementarer Umformungen • Dimensionssatz	LGS mit den Fragen nach der Lösungsmenge sollte stets auch in den äquivalenten Darstellungen interpretiert werden: $f(x)=b,\ A_f \circ x=b,\ \sum_{k=1}^{n} x_i \cdot \vec{a}_i=\vec{b}_i$
10	**Lineare Abbildungen, LGS und Matrizen II**	
	• Hintereinanderführung linearer Abbildungen (Matrizenmultiplikation); Matrizenaddition und -vervielfachung • Inverse Matrizen (Existenz der Umkehrabbildung); Eindeutige Lösbarkeit von LGS mit den dazugehörigen Interpretationen, z.B.: $dim\,Kern(f)=0$ etc. • Anwendungsaufgaben (z.B.: mehrstufige Produktionsprozesse, Markovketten oder Quadriken)	

MA-4+ Stochastik HHO G-6 (55 Stunden) und Prüfungsvorbereitung (restliche Stunden)

Std.	Lerninhalte	Anmerkungen
10	**Stochastik**	
	• Zufallsgrößen • Erwartungswert und Varianz (Standardabweichung); Eigenschaften • Ungleichung von Tschebyschew	Fortsetzung von MA-2+. Die entsprechenden Begriffe der Statistik, Mittelwerte und Streuungsmaße, sollten aus der Mittelstufe bekannt sein.
20	Anwendung: Binomial- und Normalverteilung	
	• Bernoulli-Ketten, binomialverteilte Zufallsgrößen: graphische Darstellung, Erwartungswert, Varianz • Näherung durch die Normalverteilung • Anwendungen (z. B. Wahlumfragen), kσ-Intervalle, $\sqrt{n}$ - und $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz, signifikante Abweichung, Wechselwirkung zwischen Realität, Modell und Stichprobe	mögliche Ergänzung: Poisson-Verteilung
10	Gesetz der großen Zahlen und Anwendungen	
	• Gesetz der großen Zahlen für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit • mögliche Ergänzungen: Markov-Ketten, Finanzmathematik	
	Beurteilende Statistik	
	• Hypothesentests, Null- und Gegenhypothese, Fehler 1. und 2. Art, Signifikanzniveau, Annahme- und Ablehnungsbereich • Konfidenzintervall	mögliche Ergänzung: χ^2 -Test
Rest	**komplexe Übungen zur Vorbereitung der schriftlichen Abiturprüfung**	